Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1938. Heft II

Sitzungen Juni-Dezember

München 1938

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Längsschwingungen von belasteten zylindrischen Schraubenfedern oder Stäben unter Berücksichtigung ihrer Eigenmasse.

Von Walther Meißner und Gertrud Meißner.

(Mitteilung aus dem Laboratorium für Technische Physik der Technischen Hochschule München).

Vorgelegt von Herrn W. Meißner in der Sitzung am 11. Juni 1938.

I. Einleitung.

Über die Schwingungszahlen von belasteten zylindrischen Schraubenfedern finden sich, trotz ihrer zahlreichen technischen Anwendungen, in der Literatur merkwürdigerweise keine allgemeineren Untersuchungen.

In den beiden Grenzfällen, daß die Masse der Feder gegen die des Belastungsgewichtes entweder als unendlich klein oder als unendlich groß angesehen werden kann, sind für die möglichen Kreisfrequenzen die Formeln bekannt:

$$\text{(1 a)} \qquad \vartheta_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ falls } \mu = 0;$$

$$\text{(1 b)} \qquad \vartheta_\infty = \sqrt{\frac{k}{m_F}} \left(2n - 1\right) \frac{\pi}{2}; \; n = 1, 2, 3 \ldots, \text{ falls } \mu = \infty.^1$$

Dabei ist ϑ die Kreisfrequenz, k die Federkonstante, d. h. die Kraft zur Verlängerung der Feder um die Länge 1, m_F die Masse der Feder, m die Masse des Belastungsgewichtes und $\mu = \frac{m_F}{m}$. Bei kleinen Werten von μ wird für die Kreisfrequenz in der Technik ohne weitere Begründung zuweilen gesetzt

$$\text{(1 c)} \qquad \vartheta_{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m\,(1 + \mu/2)}},$$

[1] W. Hort, Technische Schwingungslehre, Berlin 1922, S. 507.

während Sommerfeld[1] unter Hinweis auf Rayleigh[2] die für hinreichend kleine μ theoretisch fundierte Formel

$$\vartheta_{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m\,(1+\mu/3)}} \tag{1 d}$$

auf Schraubenfedern bei sehr kleinen Werten von μ anwendet.

Die für größere Werte von μ noch vorhandene Lücke, besonders für den technisch wichtigen Fall, daß μ etwa von der Größe 1–2 ist, durch theoretische und experimentelle Untersuchungen auszufüllen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, zu der wir durch eine praktische Aufgabe veranlaßt wurden.

II. Zurückführung der Schwingungen von belasteten Schraubenfedern auf Längsschwingungen von belasteten Stäben.

Eine strenge Behandlung der Federschwingungen unter Berücksichtigung der Federmasse würde auf ein dreidimensionales Problem führen. Die in dem Federdraht auftretenden Torsions- und Biegungskräfte sind, jedoch nur unter summarischer Berücksichtigung der als klein angesehenen Federmasse, von Sommerfeld in seiner schon erwähnten Arbeit über Resonanzwirkungen bei Schraubenfedern genauer betrachtet worden. Für die hier in Betracht kommenden Anwendungsfälle genügt es aber, den Bewegungszustand jedes Massenelementes des Federdrahtes als allein abhängig von seinem parallel der Federachse gemessenen Abstand von dem eingespannten festen Ende der Feder anzusehen. Dann kann man die zylindrische Schraubenfeder sich ersetzt denken durch einen zylindrischen Stab.

Die elastischen Eigenschaften eines Stabes werden bei Längsdilatation in der Regel gekennzeichnet durch seinen Elastizitätsmodul E, die Dichte ρ, die Länge l und den Querschnitt F, die einer Schraubenfeder durch die Federkonstante k und die Federlänge l (nicht gleichbedeutend mit der gesamten Länge des die

---

[1] A. Sommerfeld, Lissajous-Figuren und Resonanzwirkungen bei Schraubenfedern. Wülner-Festschrift, Leipzig 1905, S. 191.

[2] Lord Rayleigh, Theory of sound, § 156, 1877.

Feder bildenden Drahtes). Damit der Ersatzstab der Feder entspricht, muß offenbar sein:

$$E F = k l;\ F \rho l = m_F, \tag{2}$$

wobei E der Elastizitätsmodul des hypothetischen Ersatzstabes ist. Man erhält daher für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a von Deformationen des Stabes bzw. der Feder in Richtung der Stab- oder Federachse:

$$a^2 = \frac{E}{\rho} = \frac{k l^2}{m_F} = \frac{k l^2}{m \mu}. \tag{3}$$

III. Aufstellung der Differentialgleichung nebst Randbedingungen und Lösung derselben.

Bezeichnet man den Abstand eines Stabquerschnittes von seinem festen, eingespannten Ende in der Ruhelage des Stabes mit x, die Längsdilatation an der Stelle x mit u und die Zeit mit t, so gilt bekanntlich, falls von Querdilatationen, der Einwirkung der Schwerkraft und Reibungskräften abgesehen wird:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Die Schwerkraft braucht im vorliegenden Fall nicht berücksichtigt zu werden, da sie im Endresultat nur eine von der Zeit unabhängige Verschiebung der einzelnen Federpunkte hervorruft, also für die Frage der auftretenden Schwingungen ohne Bedeutung ist.

Führt man in (4) statt des Abstandes des betrachteten Federpunktes von der Einspannstelle die Länge des Federdrahtes y von der Einspannstelle bis zum betrachteten Federpunkt ein und bezeichnet die gesamte Länge des Federdrahtes mit L, so besteht offenbar die Beziehung:

$$\frac{x}{y} = \frac{l}{L}.$$

Mit derselben geht (4) über in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{L}{l}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{4a}$$

Den Ansatz (4a) hat Hort a. a. O. in anderer Weise abgeleitet und benutzt, um die Eigenschwingungen einer unbelasteten Schraubenfeder und die Fortpflanzung von Störungen, die der Feder an einem Ende auferlegt werden, zu berechnen. Die freien Schwingungen einer belasteten Feder hat Hort jedoch nicht in Betracht gezogen.

Die am freien Feder- bzw. Stabende angebrachte Masse sehen wir als vollkommen starr an, was bei Schraubenfedern in den meisten Anwendungsfällen durchaus zulässig ist.

Die auftretenden Schwingungen müssen außer der Differentialgleichung (4) noch den folgenden Randbedingungen genügen:

$$u(t, o) = o, \tag{5}$$

wenn durch $u(t, x)$ der Wert von u für den Punkt x zur Zeit t gekennzeichnet wird, und

$$m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=l} = -EF\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = -kl\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = -\frac{a^2}{l} m_F \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l}, \tag{6}$$

da der Trägheitskraft der angehängten Masse durch die am Feder- oder Stabende auftretende elastische Kraft das Gleichgewicht gehalten werden muß.

Eine partikuläre Lösung von (4), die (5) entspricht, ist

$$u(t, x) = \sin \frac{\vartheta x}{a} (A \cos \vartheta t + B \sin \vartheta t), \tag{7}$$

wobei ϑ zunächst beliebige Werte haben kann. Aus (6) und (7) folgt weiter

$$\frac{\vartheta l}{a} \operatorname{tg} \frac{\vartheta l}{a} = \frac{m_F}{m} = \mu = \vartheta \sqrt{\frac{m_F}{k}} \operatorname{tg}\left(\vartheta \sqrt{\frac{m_F}{k}}\right). \tag{8}$$

(8) wird durch unendlich viele Werte von ϑ erfüllt, derart, daß $\frac{\vartheta l}{a}$ im 1., 3., 5. . . . . Quadranten liegt. Die ϑ-Werte seien der Reihe nach mit $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n, \ldots$ bezeichnet. Damit geht die Lösung (7) über in die Reihe

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{\vartheta_n x}{a} (A_n \cos \vartheta_n t + B_n \sin \vartheta_n t), \tag{7a}$$

die wir kurz als ϑ-Reihe bezeichnen wollen.

Die Gleichungen (7a) und (8) sind für den elastischen Stab, wie wir nachträglich fanden, schon von Navier[1] aufgestellt worden. Navier hat sie aber nur für den Fall verwertet, daß der Stab einen plötzlichen Stoß erhält durch eine Masse m, gegen welche die Stabmasse m_F zu vernachlässigen ist. St. Venant[2] benutzt sie bei der Lösung desselben Problems auch für größere Werte von m_F/m, findet sie aber schließlich für seine Zwecke ungeeignet. Seitdem scheint die Formel (8) und die aus ihr folgende (7a) in Vergessenheit geraten zu sein. Wir haben sie in der späteren Literatur nicht gefunden.

Für verschwindende Federmasse, also $\mu = 0$, folgt aus (8), indem man statt des Tangens den Winkel setzt, die bekannte Formel (1a). Die anderen ϑ-Werte verlieren in diesem Fall ihren Sinn, da die masselose belastete Feder nur eine einfache Sinusschwingung ausführen kann.

Wird umgekehrt die an der Feder befestigte Masse gleich Null, also $\mu = \infty$, so muß nach (8) sein:

$$(8\,b) \qquad \frac{\vartheta_n l}{a} = (2n-1)\frac{\pi}{2}; \qquad \vartheta_n = \sqrt{\frac{k}{m_F}}\,(2n-1)\frac{\pi}{2},$$

was mit (1b) identisch ist. Mit (8b) erhält man aus (7a) für den Fall, daß zur Zeit $t = 0$ alle Punkte x in Ruhe sind, also alle B_n verschwinden (vgl. hierzu auch Formel (10b)), die bekannte Formel für die möglichen Längsschwingungen in einem unbelasteten Stab:

$$(7\,b) \qquad u(t,x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{a}{l}t.$$

Man sieht, daß in diesem Fall die ϑ-Reihe (7a) in die bekannte Fourier-Reihe der speziellen Form (7b) übergeht. Auch für endliche μ ist die ϑ-Reihe der Fourier-Reihe ähnlich, insofern als für höhere n die ϑ-Werte von den entsprechenden Werten in der Fourier-Reihe nur wenig abweichen, wie sich aus der Bedingungsgleichung (8) entnehmen läßt.

---

[1] M. Navier, Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, Paris 1823.

[2] A. Clebsch-de St. Venant-Flamant, Théorie de l'élasticité des corps solides, Paris, 1883, S. 480e.

Für den Fall schließlich, daß μ klein, jedoch von Null verschieden ist, findet man aus der Bedingungsgleichung (8), indem man den Tangens in eine Reihe entwickelt,

$$\vartheta_1 = \sqrt{\frac{k}{m\left(1 + \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{45}\mu^2 + \cdots\cdots\right)}}. \tag{8c}$$

Man sieht aus (8c), daß das Hinzufügen der halben Federmasse, wie es nach (1c) in der Technik bisweilen geschieht, für ϑ_1 nach der Theorie zu kleine Werte ergeben wird. Bei Beschränkung auf die in μ linearen Glieder geht (8c) in die Rayleighsche Formel (1d) über, die auch von St. Venant a. a. O. abgeleitet wurde.

IV. Einführung von Anfangsbedingungen für die Schwingungen von zylindrischen Schraubenfedern.

Man regt Schraubenfedern meist dadurch zum Schwingen an, daß man sie durch Zug an der am freien Ende angebrachten Masse dehnt und dann plötzlich losläßt. Es ist dann:

$$u(o, x) = C\frac{x}{l}, \tag{9}$$

wobei C eine durch die Proportionalitätsgrenze der Torsion des Drahtes eingeschränkte, im übrigen beliebige Konstante ist. Es fragt sich, was für eine Schwingungsform bei dieser Anregungsart entsteht.

Navier hat bei der Untersuchung der Stoßwirkungen auf die vertikalen Tragstangen von Hängebrücken a. a. O. die Werte der Koeffizienten in der Reihenentwicklung für die sehr allgemeinen Anfangsbedingungen

$$u(o, x) = \varphi(x),\ \dot{u}(o, x) = \psi(x) \tag{9a}$$

ermittelt; $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind dabei beliebige Funktionen von x. Ist wie in (7a)

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\frac{\vartheta_n x}{a}\left(A_n \cos\vartheta_n t + B_n \sin\vartheta_n t\right),$$

so lauten die Ausdrücke für A_n und B_n, die Navier in Anlehnung an das zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten führende Verfahren hergeleitet hat, in unsere Bezeichnungen übertragen:

$$(10a)\quad A_n = \frac{4}{\frac{2\vartheta_n l}{a} + \sin\frac{2\vartheta_n l}{a}}\left\{\varphi(l)\cos\frac{\vartheta_n l}{a} + \frac{\vartheta_n}{a}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\vartheta_n x}{a}dx\right\},$$

(10b)

$$B_n = \frac{4}{\vartheta_n\left(\frac{2\vartheta_n l}{a} + \sin\frac{2\vartheta_n l}{a}\right)}\left\{\psi(l)\cos\frac{\vartheta_n l}{a} + \frac{\vartheta_n}{a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\vartheta_n x}{a}dx\right\}.$$

Für $\mu = \infty$ gehen die Navier-Koeffizienten (10) in Fourier-Koeffizienten über.

Da die Arbeit von Navier im allgemeinen nicht zugänglich sein wird und an anderer Stelle nicht wiedergegeben zu sein scheint, so bringen wir hier in aller Kürze Naviers Herleitung von (10a) und (10b):

Nach (9a) und (7c) ist

$$(9b)\qquad \varphi(x) = \sum A_n \sin\frac{\vartheta_n x}{a};\quad \psi(x) = \sum B_n \vartheta_n \sin\frac{\vartheta_n x}{a}.$$

Danach ist, wenn ϑ_n und ϑ_n' zwei beliebige unter den Lösungen von (8) bedeuten:

$$(10)\qquad \int_0^l \frac{d\varphi(x)}{dx}\cos\frac{\vartheta_n' x}{a}dx = \sum A_n\frac{\vartheta_n}{a}\int_0^l \cos\frac{\vartheta_n x}{a}\cos\frac{\vartheta_n' x}{a}dx$$

und entsprechend mit $\psi(x)$ statt $\varphi(x)$.

Durch trigonometrische Umformungen und Intregration ergibt sich:

$$(11)\qquad \int_0^l \cos\frac{\vartheta_n x}{a}\cos\frac{\vartheta_n' x}{a}dx = \frac{\frac{\vartheta_n}{a}\sin\frac{\vartheta_n l}{a}\cos\frac{\vartheta_n' l}{a} - \frac{\vartheta_n'}{a}\cos\frac{\vartheta_n l}{a}\sin\frac{\vartheta_n' l}{a}}{\left(\frac{\vartheta_n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\vartheta_n'}{a}\right)^2}.$$

Andererseits haben wir, da ϑ_n und ϑ_n' der Gleichung (8) genügen:

$$\frac{\vartheta_n l}{a}\sin\frac{\vartheta_n l}{a} - \mu\cos\frac{\vartheta_n l}{a} = 0 \text{ und } \frac{\vartheta_n' l}{a}\sin\frac{\vartheta_n' l}{a} - \mu\cos\frac{\vartheta_n' l}{a} = 0,$$

und daher

$$(12)\qquad \frac{\vartheta_n l}{a}\sin\frac{\vartheta_n l}{a}\cos\frac{\vartheta_n' l}{a} - \frac{\vartheta_n' l}{a}\cos\frac{\vartheta_n l}{a}\sin\frac{\vartheta_n' l}{a} = 0.$$

Das Integral von (11) wird also Null, wenn ϑ_n und ϑ_n' voneinander verschieden sind. Dagegen ergibt sich für $\vartheta_n = \vartheta_n'$ durch Ausführen der Integration als Wert der jetzt unbestimmten rechten Seite:

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\vartheta_n x}{a}\, dx = \frac{\frac{2\vartheta_n l}{a} + \sin \frac{2\vartheta_n l}{a}}{4\frac{\vartheta_n}{a}}. \tag{11a}$$

In (10) verschwinden also auf der rechten Seite alle Glieder bis auf das mit $\vartheta_n = \vartheta_n'$, und es ist:

$$A_n = \frac{4}{\frac{2\vartheta_n l}{a} + \sin \frac{2\vartheta_n l}{a}} \int_0^l \cos \frac{\vartheta_n x}{a}\, d\varphi(x). \tag{13a}$$

Ein ganz entsprechendes Verfahren, auf (10) angewandt, gibt:

$$B_n = \frac{4}{\vartheta_n \left(\frac{2\vartheta_n l}{a} + \sin \frac{2\vartheta_n l}{a} \right)} \int_0^l \cos \frac{\vartheta_n x}{a}\, d\psi(x). \tag{13b}$$

Wenn man nun partiell integriert und beachtet, daß wegen (5) $\varphi(o) = 0$ und $\psi(o) = 0$ ist, so erhält man aus (13a) und (13b) die in (10a) und (10b) angegebenen Ausdrücke für A_n und B_n.

Aus den Navier-Koeffizienten (10) wird im Fall unserer Anfangsbedingung (9), nach der $\varphi(x) = C\frac{x}{l}$ und $\psi(x) = o$ zu setzen ist:

$$A_n = \frac{4C \sin \frac{\vartheta_n l}{a}}{\frac{\vartheta_n l}{a} \left(\frac{2\vartheta_n l}{a} + \sin \frac{2\vartheta_n l}{a} \right)}, \quad B_n = 0, \tag{14}$$

und die Wellenfunktion $u(t, x)$ nimmt nun die Form an:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \frac{\vartheta_n x}{a} \cos \vartheta_n t. \tag{7c}$$

Natürlich ist die benutzte Darstellung von $u(t, x)$ an die — von Navier nicht berührte — Frage gebunden, ob sich bei vorgegebenen Anfangsbedingungen die Funktion in die angesetzte quasi-periodische unendliche Reihe entwickeln läßt.

Wir haben für den Fall unserer Anfangsbedingungen (9) die Zulässigkeit der Reihenentwicklung (7a) dadurch geprüft, daß wir $u\,(t, x)$ auch in anderer Form dargestellt haben, nämlich als endliche Summe einer Reihe von Funktionen, mit Hilfe des sogenannten Verfahrens der fortsetzenden Gleichungen[1] von St. Venant und Boussinesq. Bei einer graphischen Darstellung von $u\,(t, x)$ für $\mu = 1$ und $x = l$, die wir bis zur 9. Reflexion der am freien Federende auftretenden Wellen durchführten, ergab sich bei Benutzung eines 50-cm-Rechenstabes innerhalb der Grenzen der Rechengenauigkeit Übereinstimmung zwischen beiden Verfahren.

Das Verfahren der fortsetzenden Gleichungen entspricht durchaus dem, was in der Feder bzw. dem Stab physikalisch vor sich geht: Beim Loslassen der Feder ($t = 0$) tritt am freien Ende eine Störung auf, die sich mit der Geschwindigkeit a auf das eingespannte Ende hin fortpflanzt. Infolgedessen bleibt an allen Punkten x bis zur Zeit $t = \frac{l-x}{a}$ der vor dem Loslassen vorhandene Zustand bestehen. Durch Reflexion am festen Federende ($x = 0$) entsteht eine weitere Störungswelle, die über den Punkt x von $t = \frac{l+x}{a}$ an hinwegläuft. Es folgt eine weitere Reflexion am freien Federende usf. So nimmt die Schwingungsfunktion $u\,(t, x)$ immer neue Formen an, die wir speziell für $x = l$ bezeichnen mit

$$(15)\quad u\,(t, l) = u_n\,(t) \text{ für } (2n-1)\frac{l}{a} \leqq t \leqq 2n\frac{l}{a},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Für die Durchführung des Verfahrens bei der Beschränkung auf $x = l$ erwies es sich als zweckmäßig, unter vorübergehender Benutzung von Funktionen $f_n\left(t+\frac{x}{a}\right)$, bzw. $-f_n\left(t-\frac{x}{a}\right)$, die den auftretenden Störungswellen entsprechen, die Differentialgleichung (6) erst nach Einsetzen der Funktionen $v_n\,(\zeta)$ zu integrieren, die durch (16a) definiert sind.

---

[1] Vgl. z. B. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe, Leipzig 1907, S. 495.

$$(16a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mu a}{l} = \zeta \\ u_1(t) - B = v_1(\zeta) \qquad\qquad , \zeta \geqq 0 \\ u_n(t) - u_{n-1}(t) = v_n(\zeta),\ n \geqq 2,\ \zeta \geqq (2n-1)\,\mu. \end{cases}$$

Es entstehen, wenn man die Ableitungen nach dem Argument durch Striche bezeichnet, Rekursionsformeln von der Gestalt:

$$(17)\qquad \begin{cases} v_1'(\zeta) + v_1(\zeta) = -\dfrac{C}{\mu}\zeta,\ \zeta \geqq 0 \\ v_n'(\zeta) + v_n(\zeta) = -2\left\{v_{n-1}(\zeta - 2\mu) + v_{n-2}(\zeta - 4\mu)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \cdots + v_1\big(\zeta - (2n-1)\,\mu\big)\right\} \\ \text{für } n \geqq 2,\ \zeta \geqq 2(n-1)\,\mu. \end{cases}$$

Die Funktionen $v_n(\zeta)$ erhalten die Form (16b):

$$(16b)\qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{C} v_n(\zeta) = G_n + H_n\big\{\zeta - (2n-1)\,\mu\big\} \\ +_e - \big(\zeta - (2n-1)\,\mu\big)\big\{c_{n,0} + c_{n,1}\big(\zeta - (2n-1)\,\mu\big) \\ + c_{n,2}\big(\zeta - (2n-1)\,\mu\big)^2 + \cdots + c_{n,n-1}\big(\zeta - (2n-1)\,\mu\big)^{n-1}\big\} \end{array}\right\}$$

Zahlentafel 1 gibt die Werte der Koeffizienten für $\mu = 1$. Mit ihrer Hilfe lassen sich die für die graphische Darstellung benötigten Werte von $u\,(t, l)$ berechnen.

Zahlentafel 1.

n	G_n	H_n	$c_{n,0}$	$c_{n,1}$	$c_{n,2}$	$c_{n,3}$	$c_{n,4}$	$c_{n,5}$	$c_{n,6}$	$c_{n,7}$	$c_{n,8}$	$c_{n,9}$
0	1											
1	1	−1	−1									
2	−4	+2	+4	+2								
3	+8	−2	−8	−6	−2							
4	−12	+2	+12	+10	+4	$+^4/_3$						
5	+16	−2	−16	−14	−6	$-^4/_3$	$-^2/_3$					
6	−20	+2	+20	+18	+8	$+^8/_3$	0	$+^4/_{15}$				
7	+24	−2	−24	−22	−10	$-^8/_3$	$-^4/_3$	$+^4/_{15}$	$-^4/_{45}$			
8	−28	+2	+28	+26	+12	+4	0	$+^4/_5$	$-^8/_{45}$	$+^8/_{315}$		
9	+32	−2	−32	−30	−14	−4	−2	$+^4/_5$	$-^4/_9$	$+^8/_{105}$	$-^2/_{315}$	
10	−36	+2	+36	+34	+16	$+^{16}/_3$	0	$+^8/_5$	$-^{32}/_{45}$	$+^{64}/_{315}$	$-^8/_{315}$	$+^4/_{2835}$

Im einzelnen die Rechnungen wiederzugeben, erübrigt sich, da neben diesem Verfahren das der unendlichen Reihen für den vorliegenden Fall zur Verfügung steht.

Die obenerwähnte Bedingung $u(t,x) = C\,x/l$ für $0 \leqq t \leqq \frac{l-x}{a}$ läßt sich bei dem Verfahren der fortsetzenden Gleichungen ohne weiteres erfüllen. Daß auch die für $u(t,x)$ aufgestellte ϑ-Reihe dieser Bedingung genügt, trotzdem sie für alle t mit t variabel erscheint, mag auf den ersten Blick unwahrscheinlich aussehen. Es ist dies aber eine einfache Folge davon, daß die ϑ-Reihe der Wellendifferentialgleichung (4) genügt und die Koeffizienten A_n der Anfangsbedingung (9) gemäß so bestimmt sind, daß

$$\text{(9c)}. \qquad \frac{C\,x}{l} = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \frac{\vartheta_n x}{a} \text{ für } 0 \leqq \frac{x}{a} \leqq \frac{l}{a}.$$

Zur Verifikation diene die folgende kleine Rechnung: Da es sich um eine ungerade Funktion handelt, gilt (9c) sofort auch für $-\frac{l}{a} \leqq \frac{x}{a} \leqq 0$. Nun ist

$$u(t,x) = \sum A_n \sin \frac{\vartheta_n x}{a} \cos \vartheta_n t = \frac{1}{2} \sum A_n \sin \vartheta_n \left(t + \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \sum A_n \sin \vartheta_n \left(\frac{x}{a} - t\right).$$

Wegen (9c) ist der erste der beiden Summanden $= \frac{1}{2} \frac{C\,x}{l}$ für $\frac{-l-x}{a} \leqq t \leqq \frac{l-x}{a}$, der zweite $= \frac{1}{2} \frac{C\,x}{l}$ für $\frac{-l+x}{a} \leqq t \leqq \frac{l+x}{a}$.

Also ist für positive $t \leqq \frac{l-x}{a}$ die Summe tatsächlich gleich $C\,x/l$.

Die Schwingungsform der gedehnten und plötzlich losgelassenen Feder wird bei nicht zu großen Werten von μ nicht sehr verschieden von der ϑ_1-Schwingung. Das ergibt sich ohne Berechnung der einzelnen Amplituden größenordnungsmäßig schon aus einer einfachen Energiebetrachtung:

Die potentielle Energie der gespannten Feder ist:

$$U = \frac{1}{2} k C^2. \tag{18}$$

Als Energie einer ϑ_1-Schwingung mit der Amplitude C_1 bei $x = l$ findet man durch eine einfache Rechnung für den Augenblick, in dem alle Federteilchen die Ruhelage haben, also nur kinetische Energie besitzen,

$$L_1 = \frac{1}{2} k C_1^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\vartheta_1 l}{a}\right)^2 \left\{1 + \frac{1}{\mu} + \left(\frac{\vartheta_1 l}{a\mu}\right)^2\right\}. \tag{19}$$

Das gibt unter Benutzung der Tangensformel (8) und der Gleichung (18)

$$\text{für } \mu = 1 \quad L_1 = 1{,}014\, U \left(\frac{C_1}{C}\right)^2$$

$$\text{für } \mu = 2 \quad L_1 = 1{,}04\; U \left(\frac{C_1}{C}\right)^2$$

$$\text{für } \mu = \infty \quad L_1 = 1{,}23\; U \left(\frac{C_1}{C}\right)^2.$$

Die Amplitude C_1 einer ϑ_1-Schwingung, die für sich allein die der Federspannung entsprechende Energie trüge, wäre also für den Fall $\mu = 1$ um 0,7%, für den Fall $\mu = 2$ um 2% kleiner als C. Wegen der hinzukommenden weiteren ϑ-Schwingungen ist ein etwas stärkeres Abweichen von C zu erwarten.

Wir haben die Amplituden der ersten 4 ϑ-Schwingungen gemäß (14) und (7c)

$$C_{x,n} = A_n \sin \frac{\vartheta_n x}{a},\ n = 1, 2, 3, 4$$

für die Fälle $\mu = 1$ und $\mu = 2$ bei $x = l, \frac{1}{2} l, \frac{1}{4} l, \frac{1}{10} l$ berechnet. Die Werte sind aus Zahlentafel 2 zu entnehmen. Diese zeigt auch noch, wie die Frequenzen ϑ_n sich in dem betrachteten Bereich mit μ und n ändern. Die Abweichung der Amplitudensumme $\sum_1^4 C_{x,n}$ von dem jeweiligen $Cx/l = u(o, x)$ ist innerhalb

Zahlentafel 2.

μ	$\frac{\vartheta_1 l}{a}$	$\frac{\vartheta_2 l}{a}$	$\frac{\vartheta_3 l}{a}$	$\frac{\vartheta_4 l}{a}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{C_{x,1}}{C}$	$\frac{C_{x,2}}{C}$	$\frac{C_{x,3}}{C}$	$\frac{C_{x,4}}{C}$	$\sum_1^4 \frac{C_{x,n}}{C}$
1	0,8602	$\pi+0{,}284$	$2\pi+0{,}154$	$3\pi+0{,}105$	1	0,9860	0,0129	0,0011	0,0002	1,002
					0,5	0,5430	−0,0443	−0,0006	0,0023	0,5004
					0,25	0,2779	−0,0339	0,0072	−0,0016	0,2496
					0,1	0,1119	−0,0151	0,0044	−0,0019	0.0993
2	1,077	$\pi+0{,}501$	$2\pi+0{,}295$	$3\pi+0{,}201$	1	0,9636	0,0313	0,0038	0,0009	0,9996
					0,5	0,5612	−0,0631	−0,0019	0,0043	0,5005
					0,25	0,2908	−0,0514	0,0128	−0,0029	0,2493
					0,1	0,1174	−0,0232	0,0079	−0,0035	0,0986
∞	$\frac{\pi}{2}$	$\pi+\frac{\pi}{2}$	$2\pi+\frac{\pi}{2}$	$3\pi+\frac{\pi}{2}$	1	0,8115	0,0902	0,0325	0,0166	0,9508
					0,5	0,5738	−0,0638	−0,0230	0,0117	0,4987
					0,25	0,3106	−0,0834	0,0300	−0,0064	0,2508
					0,1	0,1269	−0,0410	0,0230	−0,0148	0,0941

der Rechengenauigkeit — die letzten Ziffern sind nicht mehr sicher — ein Maß für den Einfluß, den die weiteren ϑ-Schwingungen auf $u\,(t, x)$ haben werden. Aus den Einzelamplituden erkennt man, daß bei $\mu = 1$ und $\mu = 2$ das freie Federende ziemlich sinusartig schwingt und die dem festen Federende nähergelegenen Stellen immer mehr von der reinen Sinusschwingung abweichen. Für alle Punkte x verlaufen die aus dem Übereinanderlagern der Sinusschwingungen entstehenden, hier nicht wiedergegebenen Kurven bis zur Zeit $t = \frac{l-x}{a}$ parallel der t-Achse; sie zeigen darauf anfänglich an den unteren Umkehrpunkten eine Zuspitzung, an den oberen Umkehrpunkten eine Abflachung. Wegen der Irrationalität des Verhältnisses zwischen den einzelnen ϑ_n wird sich jedoch die Kurvenform mit der Zeit immer von neuem ändern. Im zeitlichen Mittel wird die Amplitude, wenn von der Reibung entsprechend unsern Ansätzen abgesehen wird, gleich Cx/l und die Kreisfrequenz gleich ϑ_1 bleiben. In diesem Sinn ist ϑ_1 als Kreisfrequenz der belasteten Schraubenfeder anzusprechen, und die Tangensformel (8) gibt, mit der Bedingung $o \leqq \vartheta_1 \leqq \frac{\pi}{2}$ den Weg zu ihrer Berechnung. In der Praxis kommen kaum Fälle vor, in denen μ größer als 1 oder gar 2 ist.

Für die unbelastete Feder ($\mu = \infty$) ist die Schwingung nicht mehr sinusförmig, sondern setzt sich aus geraden Stücken zusammen, wie aus unsern Formeln leicht folgt und auch aus der schon erwähnten Untersuchung von Hort hervorgeht.

V. Experimentelle Prüfung der Formel für die Schwingungszahl der belasteten Schraubenfeder.

Wir haben Versuche mit einer Anzahl kleinerer Schraubenfedern durchgeführt, wobei die Werte von μ zwischen 0,125 und 2,06 lagen.

Bei der experimentellen Prüfung der Theorie besteht zunächst eine gewisse Schwierigkeit darin, daß am Anfang und Ende der Feder nicht, wie an den andern Stellen, Torsionsbeanspruchung, sondern Biegungsbeanspruchung auftritt, wenn, wie es üblich ist, die äußerste Windung des Drahtes zum Einspannen bzw. Anhängen des Belastungsgewichtes auf die Federachse hingeführt wird. Wir haben eine Anordnung gewählt, bei der sowohl dieser Fehler vermieden wird, als auch das tatsächlich in Betracht zu ziehende Federgewicht sehr genau bestimmbar ist: Die Drahtenden der Feder wurden am Anfang und Ende, ohne daß sie in die Achse der Feder geführt waren, rechtwinklig umgebogen und in die Bohrung eines eisernen Halterstücks bzw. der als Belastung dienenden eisernen Scheibe am Rand derselben so eingelötet, daß das umgebogene Ende völlig in der Bohrung steckte (vgl. Abb. 1). Hierbei sind alle Stücke der Feder ganz gleichartig beansprucht. Wie Versuche zeigten, bleibt die Belastungsplatte auch beim Recken der Feder ihrer ursprünglichen Lage parallel, und es tritt auch keine merkliche Drehung der Platte beim Schwingen der Feder auf. Das Variieren der Belastung geschah durch Anhängen weiterer Gewichte an die Platte; diese allein gab also den kleinsten bei der Feder verwendeten μ-Wert.

Bei der Bestimmung der Federkonstanten mittels Kathetometer zeigten sich trotz Verwendung von bestem Klaviersaitendraht merkliche elastische Nachwirkungen und Hysteresiserscheinungen. Daher ließen wir bei den kathetometrischen Beobachtungen die Belastungen so schnell wie möglich zwischen kleinen und großen Werten wechseln, um eine möglichst weit-

gehende Annäherung an den Fall der Schwingung zu bekommen.

Die kleineren Schwingungszahlen wurden direkt mit einer Stoppuhr bestimmt. Bei den höheren Schwingungszahlen wurde eine von einem Motor angetriebene stroboskopische Scheibe benutzt, deren Umdrehungszahl veränderlich war und auf Syn-

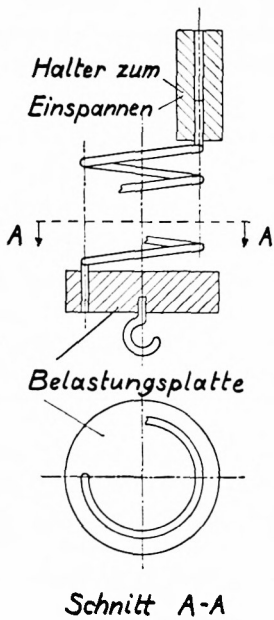

Abb. 1
Verbindung der Federenden mit dem Halterstück und der Belastungsplatt.

chronität mit der Federschwingung eingestellt wurde. Die jeweilige Tourenzahl konnte an einem Umdrehungszähler abgelesen werden. Mit Rücksicht auf die oben erwähnten Nachwirkungserscheinungen hatte es keinen Zweck, die Schwingungszahlen wesentlich genauer als auf etwa ½ % zu bestimmen.

Die Ergebnisse der Versuche sind in Zahlentafel 3 und 4 dargestellt. Tafel 3 enthält die Konstruktionsdaten der verwendeten Federn I–IV sowie vorwegnehmend für die einzel-

nen Federn die mittleren prozentualen Unterschiede zwischen den bei verschiedenen Belastungen beobachteten und den nach der Tangensformel für ϑ_1 berechneten Werten der Kreisfrequenzen. In Zahlentafel 4 sind unabhängig von der verwendeten Feder

Zahlentafel 3.

Feder Nr.	Drahtdicke cm	Windungsradius cm	Zahl der Windungen	Federmasse g	Federkonstante g-Gew./cm	$100 \times \left(\frac{\vartheta_{tg}-\vartheta_{beob.}}{\vartheta_{beob.}}\right)_m$
I	0,15	2	50	79,18	19,85	−0,1
II	0,15	2	$24^3/_4$	45,02	29,94	+0,1
III	0,2	1,25	$100^1/_4$	186,64	120,8	+0,4
IV	0,2	1,25	$48^1/_4$	91,16	244,4	−0,2

Zahlentafel 4.

Feder Nr.	μ	$\vartheta_{1/2}$ (Formel 1c)	$\vartheta_{1/3}$ (Rayleigh 1d)	ϑ_{tg} (Formel 8)	$\vartheta_{beob.}$	$100 \times \frac{\vartheta_{1/3}-\vartheta_{beob.}}{\vartheta_{beob.}}$	$100 \times \frac{\vartheta_{tg}-\vartheta_{beob.}}{\vartheta_{beob.}}$	$100 \times \frac{\vartheta_{1/3}-\vartheta_{tg}}{\vartheta_{tg}}$
IV	0,1251	17,58	17,77	17,77	17,81	−0,2	−0,2	0
IV	0,1705	20,32	20,62	20,59	20,56	+0,3	+0,2	+0,1
II	0,2002	10,90	11,08	11,06	11,00	+0,7	+0,5	+0,2
I	0,3004	8,03	8,20	8,19	8,23	−0,4	−0,5	+0,2
II	0,3604	14,12	14,52	14,47	14,50	+0,1	−0,2	+0,2
IV	0,4611	31,39	32,43	32,37	32,50	−0,2	−0,4	+0,2
I	0,4837	9,79	10,12	10,10	10,07	+0,5	+0,3	+0,2
II	0,6010	17,35	18,11	18,05	17,92	+1,1	+0,7	+0,3
IV	0,6120	35,14	36,60	36,46	36,50	+0,3	−0,1	+0,4
III	0,6425	17,59	18,35	18,27	18,01	+1,8	+1,4	+0,4
I	0,6980	11,28	11,80	11,75	11,68	+1,0	+0,6	+0,4
IV	0,9075	40,51	42,80	42,56	42,70	+0,2	−0,3	+0,5
III	0,9788	20,42	21,65	21,52	21,52	+0,6	0	+0,6
II	1,002	20,86	22,19	22,08	22,16	+0,1	−0,4	+0,6
I	1,243	13,73	14,71	14,57	14,68	+0,2	−0,7	+0,9
III	1,326	22,51	24,17	23,93	23,76	+1,7	+0,7	+1,0
II	1,805	24,88	27,18	26,71	26,67	+1,9	+0,1	+1,8
III	2,057	25,38	27,85	27,34	27,47	+1,4	−0,5	+1,9
					Mittel:	+0,62	+0,07	
	3							+2,6
	10							+6,3
	∞							+10,2

der Reihenfolge der μ-Werte nach die beobachteten und die in verschiedener Weise berechneten Kreisfrequenzen sowie ihre prozentualen Unterschiede eingetragen. Aus Zahlentafel 4 ergibt sich, daß die Tangensformel die Messungsergebnisse innerhalb der wegen der elastischen Nachwirkungen zu erwartenden Genauigkeitsgrenze wiedergibt. Die Abweichungen sind teils positiv, teils negativ und betragen im Mittel 0,07 %. Das Hinzufügen der halben Federmasse gemäß (1c) gibt, wie nach der Theorie zu erwarten war, zu kleine Werte der Schwingungszahl; die Abweichung von der Beobachtung geht bei $\mu = 2{,}06$ bis zu 7,6 %. Das Hinzufügen des dritten Teils der Federmasse entsprechend (1d) liefert Kreisfrequenzen, die im Mittel um 0,62 % höher liegen als die beobachteten. Wenn $\mu = \infty$ wird, also bei der unbelasteten Feder, verhalten sich die 3 zur Berechnung herangezogenen Frequenzen $\vartheta_{1/2}$, ϑ_{tg}, $\vartheta_{1/3}$ zu einander wie $\sqrt{2} : \frac{\pi}{2} : \sqrt{3}$; $\vartheta_{1/2}$ und $\vartheta_{1/3}$ weichen dann nach unten und oben um je rund 10 % von dem durch ϑ_{tg} gegebenen Wert der Kreisfrequenz ab.

VI. Untersuchung von nicht freien Schwingungen belasteter Schraubenfedern.

Wir haben unsere Untersuchungen auch auf den Fall nicht freier Schwingungen belasteter Schraubenfedern ausgedehnt und insbesondere den Fall behandelt, daß die frei schwingende belastete Feder plötzlich auf eine feste, zu stauchende Masse schlägt, wie es den praktischen Verhältnissen in manchen Fällen entspricht. Für die Zeit, in welcher die am freien Federende befindliche Masse die zu stauchende Masse nicht berührt, gelten unsere früheren Betrachtungen bezüglich der freien Schwingung der Feder, nur daß die Anfangsbedingungen jetzt durch den Zustand beim Aufhören der Berührung zwischen schwingender Masse und zu stauchender Masse gegeben sind. Während der Berührung ändert sich die Randbedingung am freien Federende. Sie ist nun durch die elastischen und plastischen Eigenschaften der zu stauchenden Masse bestimmt. Sowohl die Schwingungs-

vorgänge während der Berührung der beiden Massen wie die während der freien Schwingung lassen sich nach dem Verfahren der fortsetzenden Gleichungen ermitteln. Es ergeben sich interessante Resultate bezüglich der an den verschiedenen Stellen der Feder auftretenden maximalen Beanspruchungen. Diese werden sehr viel größer als bei der freien Schwingung und hängen davon ab, in welchem Spannungszustand der Feder der Aufschlag erfolgt.

Zusammenfassung.

Es werden die freien Schwingungen von belasteten zylindrischen Schraubenfedern für den Fall, daß ihre Eigenmasse nicht zu vernachlässigen ist, auf die Längsschwingungen von belasteten Stäben zurückgeführt. Für die Kreisfrequenzen ϑ der möglichen Schwingungen der Belastungsmasse ergibt sich die Tangensformel

$$\vartheta \sqrt{\frac{m_F}{k}} \operatorname{tg}\left(\vartheta \sqrt{\frac{m_F}{k}}\right) = \frac{m_F}{m},$$

wobei k die Federkonstante, m die Belastungsmasse und m_F die Federmasse ist. Durch theoretische und experimentelle Untersuchungen wird festgestellt, daß die Kreisfrequenz einer durch Zug am Belastungsgewicht und plötzliches Loslassen zum Schwingen angeregten Feder bei Werten bis zu $m_F/m = 2$ innerhalb der durch die elastische Nachwirkung begrenzten Genauigkeit dem kleinsten aus der Tangensformel sich ergebenden Wert von ϑ entspricht. Die Schwingung des äußersten Federendes ist dabei fast sinusförmig; die der Einspannstelle näher gelegenen Teile weichen etwas stärker von der reinen Sinusschwingung ab.