# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Klasse

der

## K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1917
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

# Deutung und Konvergenzbeweis für die Methoden zur Lösung der 1. Randwertaufgabe von H. A. Schwarz und von H. Poincaré im linearen Gebiet.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 9. Juni 1917.

Die beiden Wege, welche H. A. Schwarz und H. Poincaré zur Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie eingeschlagen haben, benützen den Umstand, daß man die Aufgabe für bestimmte *Grundgebiete*, z. B. das Kreisinnere, lösen kann und gehen von hier aus zu Gebieten über, die sich durch übereinander greifende Grundgebiete ausfüllen lassen.

Soll z. B. für das in Fig. 1 angegebene Gebiet

$$G = K_1' + K_{12} + K_2',$$

das durch Übereinandergreifen der beiden Kreisgebiete

$$K_1 = K_1' + K_{12}, \quad K_2 = K_2' + K_{12}$$

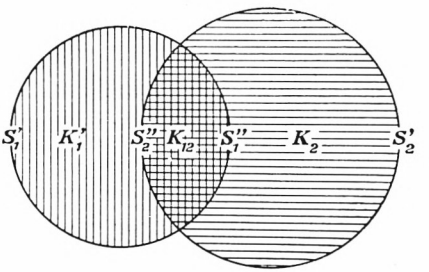


Fig. 1

entsteht, die erste Randwertaufgabe gelöst werden, d. h. soll für das Innere dieses Gebietes diejenige Funktion bestimmt werden, die die Gleichung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

erfüllt, und längs der freien Randteile

$$S_1' \text{ des Gesamtrandes } S_1 = S_1' + S_1'' \text{ von } K_1$$
$$S_2' \quad " \qquad\quad " \qquad S_2 = S_2' + S_2'' \quad " \quad K_2$$

einen vorgeschriebenen Wertverlauf $f_1(s_1')$ bzw. $f_2(s_2')$ hat, so wird man $K_1$ und $K_2$ selber als Grundgebiete wählen.

H. A. Schwarz gibt dann das folgende Verfahren an:

Man schreibt willkürlich noch für $S_1''$ einen Wertverlauf $g_1(s_1'')$ vor und löst dann die Randwertaufgabe für $K_1$ mit dem Randwertverlauf $f_1(s_1')$, $g_1(s_1'')$. Die so berechnete Funktion $V_1$ hat auf $S_2''$ einen bestimmten Wertverlauf $g_2(s_2'')$. Dann löst man die Randwertaufgabe für $K_2$ mit dem Randwertverlauf $f_2(s_2')$, $g_2(s_2'')$. Die so gefundene Funktion $V_2$ hat wieder auf dem in ihrem Innern gelegenen Stück $S_1''$ einen bestimmten Wertverlauf $g_3(s_1'')$. Man bestimmt dann $V_3$ so, daß diese Funktion im Innern von $K_1$ die Gleichung (1) erfüllt und die Randwerte $f_1(s_1')$, $g_3(s_1'')$ hat usw. In der unbegrenzten Folge dieses *alternierenden* Verfahrens verschmelzen die Funktionen $V_n$ schließlich, d. h. sie nähern sich asymptotisch der gesuchten Funktion $V$. —

Um sodann die Poincarésche Methode zu erläutern, betrachten wir zunächst das Verfahren, wie es sich gestaltet, wenn die Randwertaufgabe für einen Kreis, dessen Inneres mit $K_1$, dessen Rand mit $S_1$ bezeichnet werden möge, gelöst werden soll. Es wird dabei angenommen, *daß man eine Funktion $V_0(x, y)$ kennt, die den vorgeschriebenen Randwertverlauf besitzt*, im Innern aber noch nicht der Gleichung (1) genügt. Aus diesem $V_0$ wird eine „Füllung" des Kreisinnern konstruiert, d. h. es wird die Flächenbelegung mit der Dichtigkeit

$$\mu(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \Delta V_0 \tag{2}$$

gebildet und diese Füllung aus $K_1$ „ausgekehrt". Das heißt, es wird eine Randbelegung längs $S_1$ gebildet, deren logarithmisches Potential für alle außerhalb von $K_1$ gelegenen Punkte gleich dem der gesamten Füllung von $K_1$ ist. Daraus folgt, nebenbei bemerkt, ganz von selbst, daß die Gesamtmasse dieser Belegung gleich der der Füllung ist.

Die Lösung der Randwertaufgabe ist dann

$$V_0(x, y) - W_0(x, y) + W_1(x, y),$$

wobei unter $W_0$ das Potential der Füllung, unter $W_1$ das Potential der ausgekehrten Massen zu verstehen ist. Dies wäre die *Auskehrung eines Kreises mit einem einzigen Schritt.*

Betrachtet man dagegen zwei übereinander greifende Kreise, so ist abwechselnd auszukehren. Man beginnt wie oben mit $K_1$, dann wird in derselben Weise $K_2$ ausgekehrt; d. h. es wird die nach dem ersten Schritte noch verbliebene Füllung des Teiles $K_2'$ und die durch die erste Auskehrung von $K_1$ entstandene Belegung von $S_1''$ in derselben Weise an den Rand $S_2$ verlegt, wodurch $S_2'$ und $S_2''$ Belegungen erhalten. Dann wird $K_1$ von neuem ausgekehrt usw.

Auf diese Art werden allmählich alle Massen an den Rand $S_1' + S_2'$ verlegt.

Die gesuchte Funktion ist dann

$$V_0(x, y) - W_0(x, y) + W_\infty(x, y).$$

Dabei ist $W_0(x, y)$ das Potential der Füllung (2) des ganzen Gebietes und $W_\infty$ das Potential der ausgekehrten, durch das beschriebene alternierende Verfahren an den Rand $S_1' + S_2'$ verlegten Massen.

So viel sei zur notwendigen Übersicht gesagt. —

Im *linearen* Gebiet, also etwa für die Strecke

$$0 \leq x \leq l$$

ist die entsprechende Randwertaufgabe durchaus trivial, handelt es sich doch einfach darum, diejenige Lösung von

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0 \tag{1'}$$

zu finden, die in den Randpunkten $x = 0$ und $x = l$ vorgeschriebene Werte

$$V(0) = a, \quad V(l) = b$$

annimmt; also die lineare Funktion

$$V(x) = a + \frac{x}{l}(b - a), \tag{3}$$

und um dieser Lösung willen wird niemand der Aufgabe Beachtung schenken!

Wohl aber ist ein anderer Umstand immerhin bemerkenswert und darf dargelegt werden. Auch die oben mit Stillschweigen übergangene *Konvergenz* beider Methoden wird im *linearen* Gebiet durchaus selbstverständlich erscheinen. Sie hängt bei der auf diesen Fall übertragenen Schwarzschen Methode mit einer dem praktischen Geometer längst bekannten *Vorschrift für das Einweisen von Punkten auf einer Geraden* zusammen, und bei der auf das lineare Gebiet übertragenen Poincaréschen Methode mit der schrittweise ausgeführten *Bestimmung der Auflagereaktionen eines belasteten Balkens.* Dies wird im folgenden genau entwickelt.

### Die Schwarzsche Methode im linearen Gebiet.

Die lineare Funktion $V(x)$ zu bestimmen, die für $x = 0$ den Wert $a$, für $x = l$ den Wert $b$ annimmt, das ist so viel wie die Aufgabe, die Punkte $P_1$ (mit den rechtwinkligen Koordinaten $x = 0$, $y = a$) und $P_2$ (mit den rechtwinkligen Koordinaten $x = l$, $y = b$) verbinden. Nimmt man die Strecke $0 \leq x \leq l$ als Grundgebiet, so hat man die Punkte direkt durch das angelegte Lineal zu verbinden. Wie aber, wenn das Lineal zu kurz ist, wenn seine Länge zwischen $l : 2$ und $l$ liegt?

Dann kann man *das alternierende Verfahren* anwenden. Man schaltet zwischen Anfangs- und Endpunkt des Grundgebietes noch zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ ($> x_1$) ein und nimmt

dann die übereinander greifenden Strecken von 0 bis $x_2$ und von $x_1$ bis $l$ als neue Grundgebiete. Im Punkt $x_2$ nimmt man eine Ordinate $c$ an (deren Endpunkt $C$ schon möglichst auf der geschätzten Verbindungsstrecke $P_1 P_2$ liegt). Dann bringt man $P_1 C$ mit der Geraden $g_1 (x = x_1)$ zum Schnitt $(Y_1)$. $Y_1$ wird dann mit $P_2$ verbunden und $Y_1 P_2$ mit der Geraden $g_2 (x = x_2)$ zum Schnitt gebracht $(Z_1)$. Dann wiederholt man das Verfahren über der ersten Grundstrecke usw. Die Punktfolge $C Z_1 Z_2 \ldots$ nähert sich dann unbegrenzt dem Schnittpunkt $Z$ von $P_1 P_2$ mit $g_2$, ebenso die Punktfolge $Y_1, Y_2 \ldots$ dem Schnittpunkt $Y$ von $P_1 P_2$ mit $g_1$ (vgl. Fig. 2).

Praktisch wird dieses Verfahren weniger auf dem Reißbrett ausgeübt, als beim Einweisen von Punkten: Sind $P_1$ und $P_2$ zwei unzugängliche Punkte, etwa Hausecken und $g_1$ und $g_2$ etwa die Ränder der Bürgersteige, so weist ein Beobachter, der seinen Visierstab in Vertikalstellung längs $g_2$ bewegt, den andern, der seinen Visierstab längs $g_1$ bewegt, vom Standort $C$ aus so ein, daß dessen Stab $P_1$ verdeckt; dann dieser den andern so, daß dessen Stab $P_2$ verdeckt usw.

Der rechnerische Beweis für die Konvergenz ist sehr einfach, soll aber als Ergänzung doch nicht unterdrückt werden.

Bezeichnen wir die Strecke $C Z_1$ mit $u$, führen wir ferner die Bezeichnungen

$$\frac{x_1}{x_2} = \varepsilon \,(<1)$$

$$\frac{l - x_2}{l - x_1} = \eta \,(<1)$$

ein, so wird

$$Y_1 Y_2 = u \cdot \varepsilon, \quad Z_1 Z_2 = u \varepsilon \eta, \quad Z_2 Z_3 = u \varepsilon^2 \eta^2 \text{ usw.},$$

also

$$C Z_1 + Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + \cdots = u (1 + \varepsilon \eta + \varepsilon^2 \eta^2 + \cdots$$

und bei unbegrenzter Fortsetzung ergibt sich als Summe

$$C Z_\infty = \frac{u}{1 - \varepsilon \eta} = \frac{u \cdot x_2 \cdot (l - x_1)}{l (x_2 - x_1)}.$$

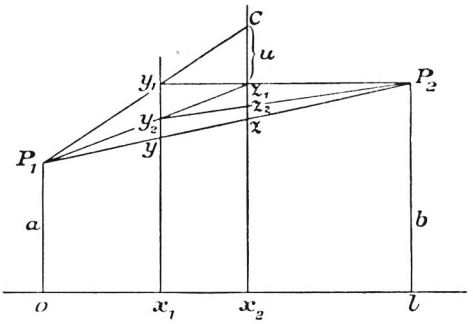


Fig. 2

Außerdem ist

$$u = \frac{x_2 - x_1}{l - x_1} \cdot \frac{(l\,c - b\,x_2 - a\,(l - x_2))}{x_2},$$

also $$C Z_\infty = c - a - \frac{x_2}{l}(b - a),$$

und die Ordinate von $Z_\infty$ wird

$$a + \frac{x_2}{l}(b - a)$$

genau wie die Gleichung (3) für die Ordinate des Schnittpunktes $Z$ der Verbindungsstrecke $P_1 P_2$ mit der Geraden $x = x_2$ vorschreibt. Die Punkte $Z_n$ nähern sich also asymptotisch dem Punkte $Z$, und zwar um so rascher, je weniger $x_1$ von Null und $x_2$ von $l$ abweicht.

### Die Poincarésche Methode im linearen Gebiet.

Wir wählen zunächst einmal die ganze Strecke als Grundgebiet, um die Methode in diesem einfachen Fall darzulegen, wo eine einzige Auskehrung zum Ziel führt. Dabei sind einige Rechnungen durchzuführen, deren Ergebnisse auch durchwegs in der bekannten — von uns heranzuziehenden — Lehre vom belasteten Balken zum Ausdruck kommen. Wir können sie aber füglich nicht entbehren, damit der Anschluß an die Ent-

wickelungen von Poincaré völlig gewahrt bleibt. Wir beginnen also mit Überlegungen der graphischen Statik und deuten diese sodann potentialtheoretisch.

Das *Biegungsmoment* eines belasteten Balkens mit den Unterstützungspunkten $x = 0$ und $x = l$ ist gegeben durch

$$M(x) = Ax - \int_0^x q(x-\xi)\,d\xi.$$

Diese Formel gibt das Moment aller Kräfte links vom Querschnitt (an der Stelle $x$) an, $q$ ist die Belastungsfunktion, und es sind die Auflagerreaktionen:

$$A = \frac{1}{l}\int_0^l q(l-\xi)\,d\xi \ \ldots \text{ im Stützpunkt } x = 0,$$

$$B = \frac{1}{l}\int_0^l q\,\xi\,d\xi \ \ldots \text{ im Stützpunkt } x = l.$$

Der Drehungssinn ist dabei nach dem Brauche der graphischen Statik positiv gerechnet im Sinne des Uhrzeigers.

Dasselbe Moment ist aber auch gleich dem Moment der auf der rechten Seite wirkenden Kräfte (Auflagerdruck $B$ und Belastung von der Stelle $x$ bis zum Endpunkt), aber mit negativem Vorzeichen versehen; also weiter

$$(4)\quad M(x) = \tfrac{1}{2}\Big(Ax + B(l-x) - \int_0^x q(x-\xi)\,d\xi - \int_x^l q(\xi-x)\,d\xi\Big).$$

Endlich ist noch zu bemerken, daß die Beziehung gilt:

$$\int_0^x q(x-\xi)\,d\xi = \int_0^x \Big(\int_0^\xi q\,d\eta\Big)\,d\xi;$$

die beiden Ausdrücke haben gleichen Wert, weil beide für $x = 0$ zu Null werden und beide denselben ersten Differentialquotienten besitzen

$$\int_0^x q\,d\xi.$$

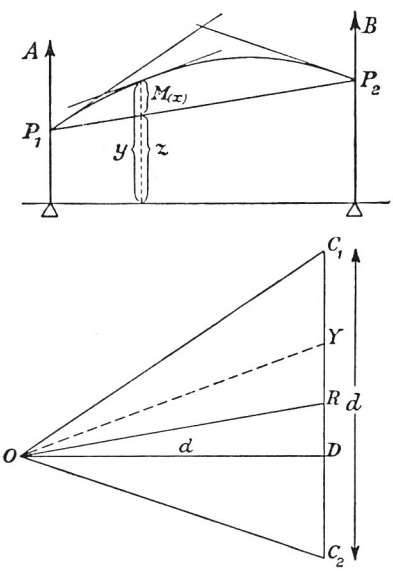


Fig. 3

Sodann erinnern wir uns an den Zusammenhang zwischen *Seilkurve* und *Kräfteplan* (vgl. Fig. 3). Ist im Kräfteplan, in dem die Kräfte $q\,d\xi$ von oben nach unten abgetragen werden

$$YC_1 = \int_0^x q\,d\xi,$$

ferner die Poldistanz $OD = 1$ und die Strecke $DC_1 = c$, so ist die *Seilkurve*, deren erste Ordinate $a$ beliebig gewählt werden kann

$$y = a + \int_0^x u\,dx,$$

wobei

$$u(x) = c - \int_0^x q\,d\xi$$

ist. Es wird also

$$y = a + cx - \int_0^x q(x-\xi)\,d\xi$$

die Gleichung der Seilkurve. Die Endordinate ist dann gegeben durch

$$b = a + cl - \int_0^l q(l-\xi)\,d\xi = a + cl - Al$$

und die Gleichung der durch Anfangs- und Endpunkt der Seilkurve gehenden *Schlußlinie* ist

$$z = a + (b-a)\frac{x}{l} = y - cx + \int_0^x q(x-\xi)\,d\xi + (c-A)x$$

oder

$$z = y - M(x). \tag{5}$$

*Man erhält also die Schlußlinie, wenn man von der Ordinate der Seilkurve das Biegungsmoment abzieht.*

Um diese Betrachtungen als „Auskehrverfahren" im Sinne von Poincaré zu deuten, schreiben wir zunächst unsere Gleichung in der Form

$$(6)\quad z = y - \frac{1}{2}\left(Ax + B(l-x) - \int_0^x q(x-\xi)\,d\xi - \int_x^l q(\xi-x)\,d\xi\right)$$

und definieren als *Potential im linearen Gebiet* das Produkt aus Masse und negativem Halbabstand. Dann ist das Potential der mit Masse von der Dichtigkeit $q$ belegten Strecke für einen inneren Punkt

$$W(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x q(x-\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}\int_x^l q(\xi-x)\,dx.$$

$W(x)$ erfüllt die Gleichung $\dfrac{d^2W}{dx^2} = -q.$

Kehren wir jetzt die Massen aus, d. h. bestimmen wir Massen $A$ und $B$ in $x = 0$ und $x = l$, die für außerhalb der Strecke gelegene Punkte dasselbe Potential besitzen, wie die belegte Strecke, so folgt (wir lassen den Faktor $\frac{1}{2}$ fort)

$$\bar{A}x + B(l-x) = \int_0^l q(x-\xi)\,d\xi \qquad (x \leqq 0)$$

$$-\bar{A}x - B(l-x) = \int_0^l q(\xi-x)\,d\xi \qquad (x \geqq l),$$

also

$$\bar{A} = \frac{1}{l}\int_0^l q(l-\xi)\,d\xi = A, \quad B = \frac{1}{l}\int_0^l q\xi\,d\xi = B.$$

*Die ausgekehrten Massen sind also mit den Auflagerdrucken identisch.*

Damit sind wir genau bei dem Poincaréschen Verfahren angelangt, dessen Gedankengänge wir hier für das lineare Gebiet der Deutlichkeit halber noch besonders entwickeln wollen.

Dies Verfahren geht aus von einer im übrigen beliebigen Kurve, die durch den vorgeschriebenen Anfangspunkt

$$(P_1) \qquad x = 0, \quad y = a$$

und den vorgeschriebenen Endpunkt

$$(P_2) \qquad x = l, \quad y = b$$

hindurchgeht. Die Gleichung dieser Kurve sei

$$y = V_0(x),$$

dann bildet man die Streckenbelegung

$$q = -\frac{d^2 V_0}{dx^2}.$$

Man berechnet sodann ihr Potential

$$W_0(x) = -\tfrac{1}{2}\int_0^x q(x-\xi) - \tfrac{1}{2}\int_x^l q(\xi - x)\, d\xi,$$

kehrt die Massen aus, wobei die Ersatzmassen $A$ und $B$ am Rand, d. h. jetzt in den Endpunkten entstehen, und bildet deren Potential

$$W_1(x) = -\frac{Ax + B(l-x)}{2}.$$

Die gesuchte lineare Funktion, d. h. die Gerade, welche $P_1$ und $P_2$ verbindet, ist dann gegeben durch den (mit (6) identischen) Ausdruck:

$$z = V_0(x) - W_0(x) + W_1(x).$$

Der Unterschied besteht lediglich in der *Deutung* (einerseits *Moment*, anderseits *Potential*) und im *Ausgangspunkt*, der bei der Bestimmung des Biegungsmomentes natürlich die *Belastung*, bei der Poincaréschen Methode aber die *Seilkurve* ist. Damit ist also die „Auskehrung durch einen Schritt" geleistet.

Wie steht es jetzt, wenn man nicht die *ganze* Strecke $0 \leqq x \leqq l$ als Grundstrecke nimmt, vielmehr *die beiden übereinander greifenden Strecken*

$$0 \leqq x \leqq x_2, \quad x_1 \leqq x \leqq l \quad (0 < x_1 < x_2 < l)$$

zu Grundstrecken genommen werden? Man hat dann nur die beiden Grundstrecken *abwechselnd* auszukehren, das heißt, man

hat zuerst die Belastung der ersten Strecke zu ersetzen durch zwei Vertikalkomponenten $A_1$ und $D_1$ in den Punkten 0 und $x_2$, sodann die zweite Grundstrecke, die mit der vertikal nach unten wirkenden Kraft $D_1$ in $x_2$ belastet ist und mit Masse von der Dichtigkeit $q$ und zwar nur noch von $x = x_2$ bis $x = l$ „auszukehren", wobei Vertikalkräfte $C_2$ und $B_2$ im Anfangs- und Endpunkt entstehen usw.

Dabei werden schließlich die Vertikalkräfte völlig in die beiden Unterstützungspunkte verlegt — es unterliegt keinem Zweifel, daß diese alternierende Konstruktion schließlich die Strecke zwischen den Stützpunkten von Kräften befreit und für die Stützpunkte die Auflagerdrucke ergibt.

Indessen wollen wir auch hier nicht versäumen, dem Anspruch auf einen rechnerischen Nachweis der Konvergenz entgegen zu kommen.

Man erhält der Reihe nach

$$A_1 = \frac{1}{x_2}\int_0^{x_2} q\cdot(x_2-\xi)\,d\xi, \quad D_1 = \frac{1}{x_2}\int_0^{x_2} q\,\xi\,d\xi,$$

$$C_2 = \frac{l-x_2}{l-x_1}D_1 + \frac{1}{l-x_1}\int_{x_2}^{l} q(l-\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{l-x_1}\left(\int_0^{x_2} q\,\xi\left(\frac{l}{x_2}-1\right)d\xi + \int_{x_2}^{l} q(l-\xi)\,d\xi\right),$$

$$B_2 = \frac{x_2-x_1}{l-x_1}D_1 + \frac{1}{l-x_1}\int_{x_2}^{l} q(\xi-x_1)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{l-x_1}\left(\int_0^{x_2} q\,\xi\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)d\xi + \int_{x_2}^{l} q(\xi-x_1)\,d\xi\right),$$

$$A_3 = C_2\frac{x_2-x_1}{x_2} = C_2(1-\varepsilon), \quad D_3 = C_2\frac{x_1}{x_2} = C_2\varepsilon,$$

$$C_4 = D_3\frac{l-x_2}{l-x_1} = C_2\varepsilon\eta, \quad B_4 = D_3\frac{(x_2-x_1)}{l-x_1} = C_2\varepsilon(1-\eta),$$

und allgemein

$$C_{2n+2} = C_2 \varepsilon^n \eta^n, \quad B_{2n+2} = C_2 \varepsilon^n \eta^{n-1}(1-\eta),$$
$$A_{2n+3} = C_2 \varepsilon^n \eta^n (1-\varepsilon), \quad D_{2n+3} = C_2 \varepsilon^{n+1} \eta^n.$$

Demnach konvergieren die $C$ und $D$ gegen Null, und die Summen

$$A_3 + A_5 + \cdots = C_2(1-\varepsilon)\,(1 + \varepsilon\eta + \varepsilon^2\eta^2 + \cdots)$$
$$B_4 + B_6 + \cdots = C_2\varepsilon(1-\eta)\,(1 + \varepsilon\eta + \varepsilon^2\eta^2 + \cdots)$$

gegen

$$C_2 \frac{(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon\eta} = C_2 \frac{(x_2 - x_1)\,(l - x_1)}{x_2\, l\,(x_2 - x_1)} = C_2 \frac{(l - x_1)}{l}$$

und

$$C_2 \frac{\varepsilon(1-\eta)}{1-\varepsilon\eta} = C_2 \frac{x_1 (x_2 - x_1)}{l\,(x_2 - x_1)} = C_2 \frac{x_1}{l}.$$

Man erhält also die Summen

$$\sum_0^\infty A_{2\nu+1} = \int_0^{x_2} q\left(1 - \frac{\xi}{x_2} + \frac{\xi}{x_2} - \frac{\xi}{l}\right) d\xi + \frac{1}{l}\int_{x_2}^{l} q\,(l-\xi)\,d\xi$$
$$= \frac{1}{l}\int_0^{l} q\,(l-\xi)\,d\xi = A$$

und

$$\sum_0^\infty B_{2\nu+2} = \int_0^{x_2} q\,\xi \cdot \frac{x_2 - x_1 + x_1 - \dfrac{x_2 x_1}{l}}{x_2\,(l - x_1)}\, d\xi$$
$$+ \frac{1}{l - x_1}\int_{x_2}^{l} q\left(\xi - x_1 + x_1 - \frac{\xi x_1}{l}\right) d\xi = \frac{1}{l}\int_0^{l} q\,\xi\, d\xi = B.$$

Damit ist der Beweis geführt, daß auch die Auskehrmethode durch ein *konvergentes Verfahren* zum Ziel gelangt, und es ist diese für die graphische Statik selbstverständliche Wahrheit bestätigt.