

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1919

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Die Verbiegung von geschlossenen und offenen Flächen positiver Krümmung.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1919.

Die Frage nach der Möglichkeit der Verbiegung geschlossener analytischer Flächen durchweg positiven Krümmungsmaßes, kurz gesagt, analytischer Eiflächen, hat ihre Geschichte, deren Einzelheiten im Enzyklopädie-Artikel III D 6 (A. Voss, Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander) Nr. 19 und 32 und in W. Blaschkes Buch: Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 163—164 mit großer Vollständigkeit angegeben sind.

Um das Notwendigste daraus hervorzuheben, seien drei Stufen der Entwicklung genannt, die an die Namen Minding (1838), Jellett (1854) und Weyl (1916) knüpfen. Minding behauptete schlechtweg, daß eine Eifläche als geschlossenes Ganzes unverbiegbar sei, Jellett versuchte die sogenannte „infinitesimale“ Unverbiegbarkeit zu beweisen — beide Sätze sind erst viel später, 1903 und 1899 bewiesen worden, Weyl endlich erbrachte den Beweis für den viel allgemeineren Existenzialsatz, „daß jede in abstracto — (durch die quadratische Differentialform für das Linienelement) gegebene geschlossene, konvexe Fläche eine einzige Realisierung im dreidimensionalen euklidischen Raum besitzt.“

Neuerdings hat E. Rembs in seiner Bonner Dissertation (Zur Verbiegung konvexer Flächen mit geschlossenem sphärischen Bild) den Jellettschen Satz wieder aufgegriffen, zugleich aber den Beweis für die Unmöglichkeit der Verbiegung

gewisser offener Flächenstücke hinzugefügt. Rembs benützt, ohne daß dies hervortritt und zur Geltung kommt, die assoziierte Fläche, die Blaschke als „Drehriß“ bezeichnet hat wegen ihrer kinematischen Bedeutung für den Verbiegungsvorgang.

Diesen „Drehriß“ mit ganz elementarer Rechnung abzuleiten und dabei alle Vorteile zu verwenden, die eben die kinematische Bedeutung mit sich bringt, ist die Aufgabe von § 1, dabei ist von dem Rechte Gebrauch gemacht, Verweise durch Beweise zu ersetzen, damit die Darstellung in sich geschlossen bleibt. Als Ergebnis neu in diesem Paragraphen ist vielleicht nur der zweite Teil von Nr. 4 und 5.

Im zweiten Paragraphen werden die Sätze von infinitesimalen auf stetige Verbiegungen übertragen, die bisher für diesen Zweck noch nicht herangezogene Weingartensche Mittelfläche erlaubt, diese Übertragung fast ohne Rechnung durchzuführen.

Der dritte Paragraph, der sich übrigens auf kein Ergebnis der ersten beiden Paragraphen stützt, gibt die überraschende Lösung der recht lebhaft besprochenen Frage (Jahresber. d. D. Math. Ver. 24 (1915), S. 207—209), innerhalb welcher Grenzen die Kugelfläche verbogen werden kann.

§ 1. Die infinitesimale Verbiegung konvexer Flächen.

1. Infinitesimale Verbiegung und Drehriß. Der von Jellett eingeführte Begriff der „infinitesimalen Verbiegung“ knüpft an folgenden Ansatz: Man denke sich zu einer Fläche

$$z = f(x, y)$$

eine vom Parameter t abhängige Schar isometrischer Flächen gegeben, wobei für $t = 0$ die Ausgangsfläche entstehen soll, und man berücksichtigt in allen weiteren Ausführungen nur die Glieder erster Ordnung in der vorausgesetzten Entwicklung nach Potenzen von t . Um dies anzudeuten, setzt man $t = \varepsilon$ und verlangt dann, der Forderung der Isometrie oder Abwickelbarkeit entsprechend, daß in

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

wobei $x_1 = x + \varepsilon \xi$, $y_1 = y + \varepsilon \eta$, $z_1 = z + \varepsilon \zeta$

gesetzt ist, das linkerhand mit dem Faktor ε versehene Glied identisch gleich Null ist. Dies führt auf die Forderung

$$dx d\xi + dy d\eta + dz d\zeta \equiv 0,$$

die ihrerseits in drei partielle Differentialgleichungen zerfällt. Nimmt man in der Darstellung der Ausgangsfläche x und y als unabhängige Veränderliche und bezeichnet man in üblicher Weise die ersten partiellen Differentialquotienten von z nach x und y mit p und q , deutet man im übrigen die Differentiation nach x und y durch die Fußmarken 1 und 2 an, so erhält man durch Nullsetzen der Koeffizienten von dx^2 , dy^2 und $dx dy$ in der geforderten Identität die drei Gleichungen in der Gestalt:

$$\xi_1 + p \zeta_1 = 0,$$

$$\eta_2 + q \zeta_2 = 0,$$

$$\eta_1 + p \zeta_2 = -\xi_2 - q \zeta_1 = \psi.$$

Durch Differentiation und Elimination von ξ_{12} und η_{12} folgt hieraus

$$p \zeta_{12} - q \zeta_{11} = \psi_1,$$

$$p \zeta_{22} - q \zeta_{12} = \psi_2,$$

und durch weitere Differentiation die partielle Differentialgleichung für ζ

$$r \zeta_{22} - 2s \zeta_{12} + t \zeta_{11} = 0,$$

wobei r , s , t die zweiten Differentialquotienten von z bedeuten. Um eine „infinitesimale Verbiegung“ der gegebenen Fläche zu bestimmen, hat man diese Gleichung zu integrieren, findet dann aus den vorhergehenden Gleichungen

$$\psi = \int (p d\zeta_2 - q d\zeta_1)$$

und schließlich auch ξ und η durch Quadraturen.

Für den Nachweis der Nichtverbiegbarkeit geschlossener konvexer Flächen eignet sich nun die Fläche, deren rechtwinklige Koordinatenebene ξ , η und ζ sind, viel weniger, als eine

zweite daraus abgeleitete, die sogenannte „assozierte Fläche“, oder, wie sie Blaschke genannt hat, der „Drehriß“.

Wir führen diese Fläche jetzt ein.

Bei der infinitesimalen Verbiegung erleidet jedes Flächenelement eine infinitesimale starre Bewegung, es ist das Büschel der Linienelemente der Ausgangsfläche kongruent zum Büschel der Linienelemente im entsprechenden Punkt der durch infinitesimale Verbiegung aus ihr hervorgehenden. Wir wollen nunmehr den Drehvektor X, Y, Z dieser Bewegung bestimmen.

Das Linienelement, dessen Richtung durch die Richtungscosinus

$$l = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad m = 0, \quad n = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

gegeben ist, geht über in das Linienelement mit den Richtungscosinus

$$l_1 = \frac{1 + \varepsilon \xi_1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad m_1 = \frac{\varepsilon \eta_1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad n_1 = \frac{p + \varepsilon \zeta_1}{\sqrt{1+p^2}},$$

und das Linienelement, dessen Richtung durch

$$l = 0, \quad m = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}, \quad n = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$$

gegeben ist, geht über in das Linienelement

$$l_2 = \frac{\varepsilon \xi_2}{\sqrt{1+q^2}}, \quad m_2 = \frac{1 + \varepsilon \eta_2}{\sqrt{1+q^2}}, \quad n_2 = \frac{q + \varepsilon \zeta_2}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Um nun die Komponenten des Drehvektors zu finden, hat man die bekannten drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta l &= \varepsilon (n Y - m Z), \\ \delta m &= \varepsilon (l Z - n X), \\ \delta n &= \varepsilon (m X - l Y) \end{aligned}$$

heranzuziehen, wobei $\delta l, \delta m, \delta n$ die Zuwachsgrößen von l, m und n sind. Die beiden gewonnenen Größensysteme ergeben dann

$$\begin{aligned} \xi_1 &= p Y, & \eta_1 &= Z - p X, & \zeta_1 &= -Y, \\ \xi_2 &= q Y - Z, & \eta_2 &= -q X, & \zeta_2 &= X. \end{aligned}$$

Diese sechs Gleichungen für X , Y , Z stehen in keinem Widerspruch, weil eben das einzelne Flächenelement bei der infinitesimalen Verbiegung einer starren Bewegung unterliegt. Man findet durch Auflösung

$$X = \zeta_2, \quad Y = -\zeta_1, \quad Z = \psi.$$

Dies sind die Gleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten des Drehrisses, wobei selbstverständlich die für ζ und ψ gewonnenen Formeln zu beachten sind.

2. Die Eigenschaften des Drehrisses. Wir wollen uns jetzt vor allem darüber klar werden, *welche Vorteile die Einführung des Drehrisses gewährt.*

Wenn man zu einer infinitesimalen Verbiegung eine infinitesimale starre, d. h. für alle Punkte der Fläche gleiche Bewegung hinzufügt, die durch

$$\xi = A + Ez - Fy,$$

$$\eta = B + Fx - Dz,$$

$$\zeta = C + Dy - Ex$$

mit den Konstanten A , B , C , D , E , F gegeben ist, so gehen X , Y , Z über in

$$X + \bar{\zeta}_2 = X + D, \quad Y - \zeta_1 = Y + E,$$

$$Z + \eta_1 + p\bar{\zeta}_2 = Z + F - Dp + pD = Z + F,$$

es wird also der Drehriß einfach *verschoben*, und zwar ist der Vektor dieser Verschiebung der Drehvektor (D, E, F) der infinitesimalen Bewegung, die zur infinitesimalen Biegung gefügt wurde.

Hieraus folgt leicht: *Der Drehriß ist nur dann ein Punkt, wenn die inf. Verbiegung eine inf. Bewegung ist.*

In der Tat können wir in diesem Fall durch Hinzufügen einer Rotation (D, E, F) erreichen, daß X , Y und Z alle drei gleich Null sind. Dann ist aber ζ konstant und ψ gleich Null, woraus folgt, daß ξ und η ebenfalls beide konstant sind. Die betrachtete Verbiegung besteht also aus einer Folge von infinitesimaler Rotation und Translation, ist also eine infinitesimale Bewegung.

Wir leiten noch einige Eigenschaften des Drehnisses ab.
Aus

$$X = \zeta_2, \quad Y = -\zeta_1, \quad Z = \int (p d\zeta_2 - q d\zeta_1)$$

folgt sofort
$$\frac{\partial Z}{\partial X} = p, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = q,$$

d. h.: Die Normalen von Fläche und Drehriß sind in entsprechenden Punkten $x, y, z \rightarrow X, Y, Z$ einander parallel.

Man findet dann auch leicht das Krümmungsmaß des Drehnisses

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{\partial(p, q)}{\partial(X, Y)} \cdot \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} \\ &= \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} \cdot \frac{1}{\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}^2}. \end{aligned}$$

Der erste Faktor ist das Krümmungsmaß der Fläche, der Nenner des zweiten ist wegen

$$r\zeta_{22} - 2s\zeta_{12} + t\zeta_{11} = 0$$

oder
$$r\zeta_{22} - s\zeta_{12} = \lambda = s\zeta_{12} - t\zeta_{11}$$

leicht in die Form zu bringen

$$= \frac{\lambda^2 - (rt - s^2)\zeta_{12}^2}{rt}.$$

Hieraus folgt: Ist das Krümmungsmaß K der Fläche positiv, dann ist im korrespondierenden Punkt des Drehnisses das Krümmungsmaß negativ.

Das Verhalten des Drehrißes in singulären Stellen, das für die zu ziehenden Folgerungen von grundlegender Bedeutung ist, wird noch zu untersuchen sein.

3. Das Reziprozitätsgesetz. Wir können aus unseren Beziehungen noch leicht den Satz ableiten:

Jede Fläche ist zugleich Drehriß für jeden ihrer Drehnisse.

Um diese Reziprozität nachzuweisen, bezeichnen wir die zweiten partiellen Differentialquotienten von ζ nach x und y mit ϱ, σ und τ , so daß die Gleichung für ζ die Gestalt erhält

$$\varrho t - 2s\sigma + \tau r = 0$$

Wir müssen sodann die infinitesimalen Verbiegungen des Drehrisses bestimmen, wobei die Gleichungen

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = p, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = q$$

zu beachten sind. Die zweiten partiellen Differentialquotienten von Z nach X und Y bezeichnen wir noch mit r_1 , s_1 und t_1 und erhalten aus

$$X = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad Y = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$dZ = p dX + q dY$$

leicht

$$A \cdot r_1 = -r \cdot \sigma + s \cdot \varrho,$$

$$A \cdot s_1 = -r\tau + s\sigma = -s\sigma + t\varrho,$$

$$A \cdot t_1 = -s \cdot \tau + t \cdot \sigma,$$

wobei ist

$$A = \varrho\tau - \sigma^2.$$

Bezeichnen wir jetzt die zweiten partiellen Differentialquotienten der x -Komponente ($\bar{\zeta}$) der infinitesimalen Verbiegung des Drehrisses nach x_1 und y_1 mit ϱ_1 , σ_1 , τ_1 , so erhalten wir die Differentialgleichung

$$r_1 \tau_1 - 2s_1 \sigma_1 + \varrho_1 t_1 = 0$$

oder

$$\tau_1(s\varrho - rs) - \sigma_1(t\varrho - r\tau) + \varrho_1(t\sigma - s\tau) = 0.$$

In dieser Differentialgleichung liegt der Reziprozitätssatz begründet, man kann, weil sie besteht,

$$\varrho_1 = \lambda \varrho, \quad \sigma_1 = \lambda \sigma, \quad \tau_1 = \lambda \tau$$

wählen und erhält für die partiellen Differentialquotienten von $\bar{\zeta}$ nach X und Y , die mit $\bar{\zeta}_1$ und $\bar{\zeta}_2$ bezeichnet werden mögen

$$d\bar{\zeta}_1 = \varrho_1 dX + \sigma_1 dY = \lambda(\varrho dX + \sigma dY) = \lambda(\varrho\tau - \sigma^2) dy$$

$$d\bar{\zeta}_2 = \sigma_1 dX + \tau_1 dY = \lambda(\sigma dX + \tau dY) = \lambda(\sigma^2 - \varrho\tau) dx.$$

Da beide Größen vollständige Differentiale sind, so ist

$$\lambda(\varrho\tau - \sigma^2)$$

von x und y frei, also eine Konstante c .

Man hat also

$$d\bar{\zeta}_1 = c dy, \quad d\bar{\zeta}_2 = -c dx$$

und weiter für die z -Koordinaten ($\bar{Z}$) dieses speziellen Drehnisses des Drehnisses der Ausgangsfläche

$$\begin{aligned} d\bar{Z} &= p d\bar{X} + q d\bar{Y} = p d\bar{\zeta}_2 - q d\bar{\zeta}_1 = -c(p dx + q dy) \\ &= -c dz. \end{aligned}$$

Damit ist der Reziprozitätssatz begründet, denn man hat als einen möglichen Drehriß ($\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$) des Drehnisses (X , Y , Z) der Ausgangsfläche erhalten

$$\bar{X} = \bar{\zeta}_2 = -cx, \quad \bar{Y} = -\zeta_1 = -cy, \quad \bar{Z} = -cz,$$

und braucht die Konstante c nur gleich -1 zu setzen, um den Ausdruck für den Reziprozitätssatz zu haben.

Um noch eine Anwendung zu geben, betrachten wir den Drehriß der Kugel und überlegen uns, was hier der Reziprozitätssatz ergibt.

$$\text{Ist} \quad z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \dots,$$

so erfüllt ζ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0,$$

daher wird

$$\zeta = \frac{z(x^2 - y^2) + 2\lambda xy}{2} + \dots$$

$$X = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \lambda x - zy + \dots \quad Y = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -zx - \lambda y + \dots$$

$$x = \frac{\lambda X - zY}{\lambda^2 + z^2} + \dots, \quad Y = -\frac{zX - \lambda Y}{\lambda^2 + z^2} + \dots,$$

$$\begin{aligned} dZ = p dX + q dY &= \frac{(\lambda X - zY + \dots) dX + (-zX - \lambda Y + \dots) dY}{\lambda^2 + z^2} \\ &= \frac{\lambda(X^2 - Y^2) - 2zXY + \dots}{\lambda^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Es ist also im Nullpunkt

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0,$$

d. h. die mittlere Krümmung des Drehrisses ist Null; d. h. also: *Der Drehriß einer Kugel ist eine Minimalfläche*, denn in jedem Punkt des Drehrisses, der einem Nabelpunkt der Fläche entspricht, ist die mittlere Krümmung gleich Null.

Auf Grund des Reziprozitätssatzes kann dann jede Minimalfläche einer infinitesimalen Verbiegung unterworfen werden, deren Drehriß eine Kugel ist. Wir wollen feststellen, was dies für eine infinitesimale Verbiegung ist.

$$\text{Ist} \quad z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \dots$$

die Minimalfläche, so wird

$$\zeta = \frac{z(x^2 + y^2) + 2\lambda xy + \dots}{2}$$

und hieraus folgt für den Drehriß

$$Z = \frac{\lambda(X^2 + Y^2) + 2zXY + \dots}{\lambda^2 - z^2}.$$

Soll der Drehriß eine Kugel sein, so muß man z gleich Null nehmen und man erhält, wenn man die Glieder bis zur zweiten Ordnung in x und y und bis zur ersten Ordnung in ε berücksichtigt, für die Nachbarfläche die Entwicklung

$$z_1 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \varepsilon xy + \dots$$

$$x_1 = x + \dots$$

$$y_1 = y + \dots$$

$$\text{oder} \quad z_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 - y_1^2) + \varepsilon x_1 y_1.$$

Es ist also die mittlere Krümmung im Koordinatenanfang

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y_1^2} = 0 + \varepsilon^2 \cdot (\dots)$$

d. h. die unendlich benachbarte Fläche ist, wenn man die Glieder erster Ordnung in ε berücksichtigt, wieder Minimalfläche und man sieht, daß unter allen infinitesimalen Verbiegungen einer Minimalfläche diejenigen eine Kugel als Drehriß besitzen, die die Minimalfläche in eine unendlich benachbarte Minimalfläche überführen.

4. Der Jellettsche Satz. Wir gehen nunmehr zu dem Beweis des Jellettschen Satzes über, der besagt, daß eine geschlossene analytische Fläche positiver Krümmung keine infinitesimale Verbiegung zuläßt, abgesehen von der Bewegung. Wesentlich für den Nachweis ist die oben (Nr. 2) bewiesene Eigenschaft des Drehrisses, daß er entweder in einen Punkt ausartet — wenn nämlich die Verbiegung eine Bewegung ist — oder überall negative Krümmung besitzt. Man entnimmt daraus, daß er im zweiten Fall eine *geschlossene, ganz im Endlichen verlaufende Fläche negativer Krümmung sein müßte*, einen Widerspruch und folgert, daß er nur ein isolierter Punkt sein kann, womit dann der Jellettsche Satz bewiesen wäre. — Allein, dieser Schluß hat doch noch eine Lücke, es fehlt die Betrachtung der singulären Punkte des Drehrisses! Ein Flächenstück negativer Krümmung hat in *regulären* Punkten sicher kein Extrem einer der drei Koordinaten, wohl aber kann dies in *singulären* Punkten eintreten, wie z. B. auf dem scharfen Rand der Rückkehrkante der Pseudosphäre. Der Drehriß aber hat, das werden wir sehen, keine derartigen Singularitäten; er besitzt nirgends eine Stützebene, das heißt also, jede Ebene, die einen Punkt des Drehrisses enthält, zerlegt den Gesamt-raum in zwei Teile, die beide nicht frei von Punkten des Drehrisses sind. Oder: Jede Ebene, die mit dem Drehriß einen Punkt gemein hat, schneidet ihn. (Damit ist dann auch ausgeschlossen, daß der Drehriß etwa in eine Kurve ausartet, denn eine Kurve besitzt Stützebenen. Um noch ein anderes Bedenken gleich von vorneherein abzuschneiden, betonen wir, daß die Punkte des Drehrisses auf Grund der in jedem Bereich analytischen Zuordnung zur Fläche eine perfekte Menge bilden, daß also jeder Häufungspunkt von Punkten des Drehrisses selbst dem Drehriß angehört. Aus isolierten Punkten kann der Drehriß gemäß seiner Natur als stetige Fläche auch nicht bestehen!)

Bei der Untersuchung des Drehrisses können wir die Reihenentwicklung der Fläche in der Umgebung des zu untersuchenden Punktes in der Gestalt

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) + \dots \quad (a > 0, b > 0)$$

annehmen, außerdem aber, da infinitesimale Bewegungen an der Gestalt des Drehrisses nichts ändern (Nr. 2), annehmen, daß ζ mit Gliedern von mindestens zweiter Ordnung beginnt.

Im folgenden brauchen wir durchweg nur die Glieder niedrigster Ordnung und bezeichnen diese Ordnung bei ζ mit m (≥ 2). Für die Glieder niedrigster Ordnung behalten wir durchweg die bisherigen Funktionszeichen bei, erhalten daher für ζ jetzt die Differentialgleichung

$$a\zeta_{11} + b\zeta_{22} = 0,$$

aus der bekanntlich folgt, daß ζ nebst seinen Differentialquotienten eine indefinite Funktion ist. Das gleiche gilt also für

$$X = \zeta_2, \quad Y = -\zeta_1 \quad (\text{Ordnung: } m-1).$$

Endlich ist

$$Z_1 = ax\zeta_{21} - by\zeta_{11} = a(x\zeta_{21} + y\zeta_{22}) = (m-1)a\zeta_2,$$

$$Z_2 = ax\zeta_{22} - by\zeta_{12} = -b(x\zeta_{11} + y\zeta_{12}) = -(m-1)b\zeta_1,$$

also

$$bZ_{11} + aZ_{22} = 0,$$

d. h. Z ist wieder eine indefinite Funktion (von der Ordnung m).

Da nun die Funktion

$$AX + BY + CZ,$$

wie man auch die Konstanten A, B, C wählt, immer mit Gliedern beginnt, die *indefinit* sind, so hat der Drehriß keine Stützebene — weder in regulären Punkten, wo ja, wie wir schon wissen, sein Krümmungsmaß negativ ist, noch in singulären.

(Wie eine derartige Singularität aussehen kann, möge am Beispiel

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \dots$$

erläutert werden. Man erhält hier, wenn ζ mit Gliedern dritter Ordnung beginnt

$$\zeta = a(x^3 - 3xy^2) + b(y^3 - 3yx^2) + \dots,$$

$$X = b(3y^3 - 3x^2) - 6axy + \dots,$$

$$Y = 6bxy - a(3x^2 - y^2) + \dots,$$

$$Z = 2a(y^3 - 3x^2y) + 2b(-x^3 + 3xy^2) + \dots,$$

und die Normalschnitte des Drehrisses sind in dritter Annäherung teils Neilsche Parabeln, deren Spitzentangente in der xy -Ebene liegt, teils Geraden in der xy -Ebene.)

Damit sind alle notwendigen Ergänzungen zum Gedanken-gang des Beweises des Jellettischen Satzes erbracht.

Er läßt für geschlossene konvexe Flächen noch eine *Erweiterung* zu.

Eine geschlossene Fläche negativer Krümmung (mit Punkten, die singulär sind, in denen aber keine Stützebenen existieren), ist unmöglich. Es ist aber auch eine Fläche unmöglich, die diese Eigenschaften in allen Punkten bis auf drei besitzt. Denn wenn man durch diese drei Punkte eine Ebene legt, so muß es doch Punkte der Fläche geben, die von dieser Ebene einen Maximalabstand haben — und das stünde im Widerspruch damit, daß die Fläche in allen übrigen Punkten den Charakter negativer Krümmung besitzt.

Hieraus folgt: *Eine geschlossene konvexe Fläche, die in allen ihren Punkten positive Krümmung besitzt, mit Ausnahme von drei Punkten, läßt ebenfalls außer der infinitesimalen Bewegung keine infinitesimale Verbiegung zu.*

Es sind also noch einige Fälle, die früher als Ausnahmen hervorgehoben werden mußten, mit einbezogen kraft der Wirkung, die die Einführung des Drehrisses mit sich bringt. Er ist das richtige Werkzeug für derartige Betrachtungen.

5. Der Satz von Rembs. Wir betrachten jetzt mit Rembs noch offene Flächen positiven Krümmungsmaßes mit einem ebenen Rand parabolischer Krümmung, einem Rand also, längs dessen die Fläche eine in allen Randpunkten berührende Tangentialebene besitzt. Da nach Nr. 2 der Drehriß und die Grundfläche überall in entsprechenden Punkten parallele Tangentialebenen haben, so folgt sofort, daß diesem ebenen Rand auf dem Drehriß ebenfalls ein ebener Rand entspricht. In der Tat ergibt die oben abgeleitete Gleichung

$$dZ = p dX + q dY,$$

daß für $p = q = 0$ (Tangentialebene parallel zur xy -Ebene)

$$dZ = 0$$

wird. Also ist längs des Randes die Drehkomponente senkrecht zur gemeinsamen Normale konstant, dem Rand der Fläche entspricht eine geschlossene ebene Kurve des Drehrisses.

Eine geschlossene ebene Kurve ist aber auf einer Fläche negativen Krümmungsmaßes als Berandung eines einfach zusammenhängenden Stückes unmöglich, weil es keinen Punkt der Fläche gibt, der von dieser Ebene einen maximalen Abstand besitzt.

Also läßt auch ein offenes Flächenstück der von Rembs aufgegriffenen Gestalt keine infinitesimale Verbiegung zu.

Gewiß entsteht im Zusammenhang mit diesem Satz die Frage, welche Bewandtnis es mit der Verbiegung einer durchweg positiv gekrümmten Flächenkalotte überhaupt hat. Die Flächenkalotte soll von einer ebenen Randkurve begrenzt sein und die „infinitesimale“ Verbiegung soll in der Weise stattfinden, daß die Randkurve *eben bleibt*; auch soll die Kalotte entweder an keiner Stelle oder überall „überhängen“, das heißt, der Neigungswinkel ihres Randstreifens gegen die Ebene der Randkurve soll entweder überall oder an keiner Stelle kleiner als ein rechter Winkel sein. Daß die Kalotte die Ebene der Randkurve nirgends berühren kann, folgt aus der Voraussetzung durchweg positiver Krümmung.

Wir verlegen die Randkurve in die xy -Ebene und können dann ohne Einschränkung der Allgemeinheit für z die Reihenentwicklung

$$z = by + \frac{1}{2}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) + \dots \quad (b \neq 0)$$

voraussetzen, so daß die Gleichung der ebenen Randkurve lautet

$$z = 0, \quad y = -\frac{a_{11}}{2b}x^2 + \dots$$

Längs der Randkurve soll aber

$$\zeta = c_1x + c_2y + \frac{1}{2}(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2) + \dots$$

zu Null werden, d. h. die Koeffizienten in

$$\zeta = c_1 x + \frac{1}{2} \left(b_{11} - \frac{c_2 a_{11}}{b} \right) x^2 + \dots$$

müssen verschwinden, woraus folgt

$$c_1 = 0, \quad b_{11} = \frac{c_2 a_{11}}{b}.$$

Die Drehkomponenten X, Y, Z sind am Rand dann gegeben durch

$$\begin{aligned} X = \zeta_2 &= c_2 + b_{12}x + b_{22}y + \dots, \\ Y = -\zeta_1 &= 0 + b_{11}x + b_{12}y + \dots \end{aligned}$$

Hieraus sieht man, daß die horizontale Komponente der Drehung die Richtung der Randkurve hat, oder vielmehr, man hat dieses kinematisch selbstverständliche Ergebnis auch analytisch bestätigt. Längs der Randkurve ist ferner

$$Z' = p \zeta'_2 - q \zeta'_1$$

und im Koordinatenanfang

$$Z' = -b \cdot b_{11} = -c_2 \cdot a_{11}.$$

Es ist aber $a_{11} > 0$, wenn die Kalotte „überhängt“, $a_{11} < 0$, wenn sie nicht überhängt; nach unserer Voraussetzung ist also $a_{11} > 0$, d. h. der zweite Differentialquotient von z in der Richtung der Tangente der ebenen Randkurve, von einerlei Vorzeichen längs der ganzen Randkurve.

Da Z eine periodische Funktion ist, d. h. bei einmaligem Umlauf um die Randkurve seinen Wert wieder annimmt, so muß c_2 , d. h. die horizontale Drehkomponente, entweder einen mindestens zweimaligen Zeichenwechsel erleiden, oder beständig gleich Null sein. In diesem letzteren Falle würde also Z längst des Randes konstant sein, und das ist, wie wir wissen, nur möglich, wenn die infinitesimale Verbiegung in eine Bewegung ausartet. Also müssen die Zeichenwechsel eintreten. Demnach lautet das Ergebnis:

Eine nirgends überhängende, von einer ebenen Randkurve begrenzte Flächenkalotte positiver Krümmung läßt (von der Bewegung abgesehen), nur solche *infinitesimale*, die Randkurve

als ebene Kurve erhaltenden Verbiegungen zu, bei denen die Randelemente der Fläche ihren Neigungswinkel gegen die Ebene der Kurve zum Teil vergrößern, zum Teil verkleinern. —

(Man gewinnt an Flächenkalotten aus Blech den Eindruck, als ob eine Verbiegung mit Erhaltung der ebenen Randkurve als ebene Kurve nicht möglich sei; die analytische Behandlung gibt bisher keinen Anhaltspunkt dafür, scheint vielmehr nichts über den soeben bewiesenen, mit mancherlei Bedingungen belasteten Satz Hinausgehendes zu liefern.)

§ 2. Stetige Verbiegung konvexer Flächen.

1. Kinematische Vorbetrachtungen. Aus der Unmöglichkeit der *infinitesimalen* Verbiegung geschlossener konvexer Flächen kann durch eine einfache kinematische Betrachtung die Unmöglichkeit der *stetigen* Verbiegung erschlossen werden. Wir werden daran erinnern, daß mit jedem Paar isometrischer Flächen die infinitesimale Verbiegung einer dritten Fläche gegeben ist, und wir werden dann weiter sehen, daß, wenn die beiden Flächen überall positives Krümmungsmaß besitzen, und dem angenommenen stetigen Verbiegungsvorgang entsprechend, einander hinreichend nahe liegen, die dritte Fläche, die sogenannte *Mittelfläche*, ebenfalls überall positive Krümmung besitzt, also wegen des *Jellettschen* Satzes keine infinitesimale Verbiegung, nur Bewegung zuläßt. Endlich ist zu zeigen, daß in diesem Falle die isometrischen Flächen kongruent sind.

Die Betrachtungen kinematischer Natur sollen vorangeschickt werden. Die Bedingung der Isometrie oder Abwickelbarkeit zweier Flächen $F(x, y, z)$ und $F_1(x_1, y_1, z_1)$, also

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

läßt sich schreiben

$$\begin{aligned} d\left(\frac{x_1 + x}{2}\right) d(x_1 - x) + d\left(\frac{y_1 + y}{2}\right) d(y_1 - y) \\ + d\left(\frac{z_1 + z}{2}\right) d(z_1 - z) = 0 \end{aligned}$$

und dies bedeutet, nach § 1, Nr. 1, daß

$$\xi = x_1 - x, \quad \eta = y_1 - y, \quad \zeta = z_1 - z,$$

also der Vektor, der korrespondierende Punkte P und P_1 von F und F_1 verbindet, gleichzeitig eine infinitesimale Verbiegung der „Mittelfläche“ F_2

$$x_2 = \frac{x + x_1}{2}, \quad y_2 = \frac{y + y_1}{2}, \quad z_2 = \frac{z + z_1}{2}$$

des Ortes der Mittelpunkte P_2 der Strecken PP_1 angibt.

Es ist jedem Punkt P_2 die infinitesimale Verbiegung

$$\varepsilon \xi, \quad \varepsilon \eta, \quad \varepsilon \zeta$$

zugeordnet.

Daß die Transformation $P \rightarrow P_1$ eine endliche Bewegung darstellt, wenn $\varepsilon \xi$, $\varepsilon \eta$, $\varepsilon \zeta$ eine infinitesimale Bewegung bedeutet, ist ein altbekannter kinematischer Satz und so abzuleiten: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden

$$\begin{aligned} \xi &= a - \gamma y, \\ \eta &= b + \gamma x, \\ \zeta &= c \end{aligned}$$

und es wird dann

$$\begin{aligned} x_1 - x &= a - \gamma \left(\frac{y + y_1}{2} \right), \\ y_1 - y &= b + \gamma \left(\frac{x + x_1}{2} \right), \\ z_1 - z &= c. \end{aligned}$$

diese Formeln stellen aber eine endliche Bewegung dar.

2. Der Mindingsche Satz. Nach diesen vorbereitenden Erinnerungen kommen wir auf die stetige Verbiegung zurück. Die vorausgesetzte *stetige* Folge von Flächen, welche aus der Grundfläche F hervorgehen sollen, setzt eine Fläche F_1 voraus, die von F in Gestalt und Lage beliebig wenig abweicht. Daß dann auch die Mittelfläche F_2 von F in Gestalt (und Lage) beliebig wenig abweicht, ist für die Anschauung gewiß selbstverständlich und bedarf nur der etwas umständlichen Nach-

rechnung; es leuchtet demnach ein, daß F_2 dann auch überall positives Krümmungsmaß besitzen muß.

Die (endliche) Biegung kann in zwei Komponenten zerlegt werden, eine Biegung, bei der Punkt P , in dessen Umgebung die Fläche F durch

$$z = \frac{1}{2} (ax^2 + by^2) \cdots \left(a = \frac{1}{R_1}, b = \frac{1}{R_2} \right)$$

dargestellt werden möge, und dieser Punkt nebst den Linien-
elementen fest bleibt, so daß die entstehende Fläche die Darstellung

$$z = \frac{1}{2} (c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2) + \cdots$$

hat, wobei

$$c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = ab$$

ist; dazu kommt eine endliche Bewegung, die die Zwischenform $\bar{F}$ in die Fläche F_1 überführt.

Die Größen c und die Bewegungen sind im allgemeinen in den Punkten P von F verschieden. Jede Bewegung zerlegen wir wieder in Rotation um P und Translation PP_1 , wobei klar ist, daß diese Translation das Krümmungsmaß der Mittelfläche in P_2 nicht beeinflusst.

Man erhält dann für das Krümmungsmaß K_2 der Mittelfläche F_2 im Punkte P_2 den Ausdruck

$$K_2 = \frac{G}{(L^2 + M^2 + N^2)^2}.$$

Dabei ist

$$L = a_{31} + a_{13},$$

$$M = a_{32} + a_{32},$$

$$N = 1 + a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\begin{aligned} G = & abN(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{33}^2) \\ & + ac_{22}(N^2 + (a_{32} - a_{23})(2a_{23} - 2a_{32}a_{33} + a_{32}N)) \\ & + bc_{11}(N^2 + (a_{31} - a_{13})(2a_{13} - 2a_{31}a_{33} + a_{31}N)) \\ & + 2ac_{12}(a_{13} - a_{31})(a_{32}a_{33} - a_{23}) \\ & + 2bc_{12}(a_{23} - a_{32})(a_{31}a_{33} - a_{13}). \end{aligned}$$

Die a sind die Elemente eines (von Ort zu Ort wechselnden) orthogonalen Koeffizienten-Schemas, entsprechend den

Drehungen um Normale und zwei zueinander konjugierte orthogonale Richtungen in P .

Wir haben den Ausdruck vollständig angegeben; was uns daran interessiert, ist der eine Umstand, daß für

$$\begin{aligned} c_{11} &= a, & c_{22} &= b, & c_{12} &= 0, \\ a_{ik} &= 0 \ (i \neq k), & a_{ii} &= 1 \end{aligned}$$

sich ergibt

$$K_2 = ab = K$$

und daß, wenn nahezu der Spezialfall der völligen Identität von F und F_1 vorliegt, K_2 von K sehr wenig abweicht.

Es ist anzunehmen, daß durch den für endliche Verbiegungen schon mehrfach herangezogenen Quaternionenkalkül die Formel für K_2 eine elegantere Gestalt bekommt — für unsere Zwecke erscheint es vielleicht schon überflüssig, daß wir überhaupt die fertige Formel angegeben haben. Denn, um dies nochmals zu sagen, bei völligem Zusammenfallen von F und F_1 fällt auch F_2 mit F zusammen, also wird bei geringer Abweichung F_2 von F sehr wenig verschieden sein. —

Damit ist dann das Schlußverfahren beendet, es ist nachgewiesen, daß die Möglichkeit einer *stetigen* Verbiegung die Möglichkeit einer *infinitesimalen* Verbiegung der Mittelfläche im Widerspruch zum *Jellettschen* Satz mit sich bringen würde. —

Im Anschluß an die Schlußbemerkung in § 1, Nr. 4 ist auch leicht zu zeigen, daß eine geschlossene konvexe Fläche mit nicht mehr als drei Punkten, in denen K keinen endlichen positiven Wert hat, keine stetige Verbiegung zuläßt.

3. Erweiterung des Rembsschen Satzes. Will man eine Fläche der Art, wie sie Rembs betrachtet hat, stetig verbiegen unter Erhaltung der Eigenschaft, daß der *parabolische Randstreifen ein ebener parabolischer Streifen bleibt*, so kann man voraussetzen, daß bei diesem Verbiegungsvorgang die Tangentialebene des parabolischen Streifens parallel zur ursprünglichen Lage bleibt. Die Mittelfläche als Ort der Mittelpunkte der Strecken, die korrespondierende Punkte PP_1 verbinden, hat dann auch einen ebenen Rand mit fester Tangential-

ebene, also läßt sie keine infinitesimale Verbiegung zu und daher die Fläche F' keine stetige Verbiegung der vorgeschriebenen Art. Es bleibt dahingestellt, ob sie allgemeinere Verbiegungen zuläßt, bei denen der Randstreifen nicht mehr eben bleibt. —

Schließlich ist noch zu bemerken, daß der im zweiten Teil von § 1, Nr. 5 bewiesene Satz in derselben Weise, wie der Rembssche die Erweiterung von infinitesimale auf stetige Verbiegungen zuläßt; der Beweis ist ebenfalls durch Einschaltung der Mittelfläche zu führen.

§ 3. Die Verbiegung der offenen Kugelfläche.

1. Die Ennepersfläche vom cyklischen Typus. Während die geschlossene Kugelfläche unverbiegbar ist, läßt sich dagegen eine Kugelfläche mit noch so kleiner Öffnung stets verbiegen. Der erste Teil dieses Satzes ist im Jahre 1899 bewiesen worden, der zweite soll hier bewiesen werden.

Um die Richtigkeit der Behauptung zu erkennen, muß man nur nachweisen, daß es nahezu geschlossene Flächenstücke konstanten positiven Krümmungsmaßes gibt, wobei die analytische Darstellung der Fläche einen Parameter enthält, und wobei durch bestimmte Wahl dieses Parameters die Fläche in eine Kugel übergeht.

Dazu eignen sich die Enneperschen Flächen und zwar im besondern die von H. Sievert angefertigte, im Verlag von L. Brill erschienene Fläche, 17. Serie, Nr. 3b, die als „cyklischer Typus“ bezeichnet ist. Wir geben eine kurze Beschreibung und bringen sodann den analytischen Nachweis, daß die Fläche stetig in eine (oder genauer zwei einander berührende) Kugel übergeführt werden kann.

Das Modell zeigt vier kongruente mit je zwei Löchern versehene Eiflächen, die einen Zyklus bilden, jede dieser Eiflächen hat mit der folgenden eine ebene Rückkehrkante gemein, eine geschlossene Kurve, die in einer Ebene durch die Achse der Fläche gelegen ist. Die beigegefügte Skizze (Fig. 1)

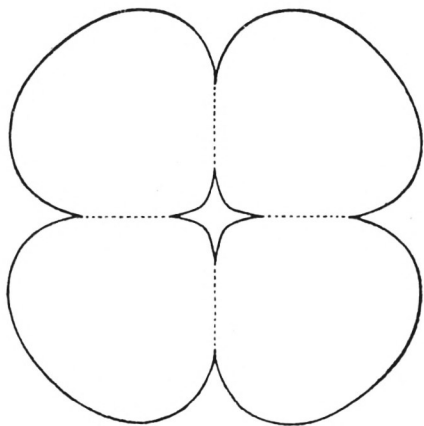


Fig. 1

gibt den Symmetrieschnitt der Fläche an, der in einer Ebene senkrecht zur Figurenachse gelegen ist. *Das Modell gibt aber noch kein vollständiges Bild.* Will man ein solches erhalten, so muß man auf die Dissertation von Sievert¹⁾ zurückgreifen. Der Schnitt der Fläche mit der Symmetrieebene besteht aus zwei getrennten Kurven, von denen die äußere etwa die Gestalt einer vierspitzigen Epicykloide, die innere die einer vierspitzigen Hypocykloide hat. Längs der äußeren Kurve schneidet die Fläche die Ebene senkrecht, während die innere Kurve eine Doppelkurve der Fläche ist. Längs der Doppelkurve setzen zwei symmetrisch zur Grundebene gelegene, gegen die Hauptachse asymptotisch verlaufende Zweige ein, und diese Zweige bestehen aus vier Paaren von Hohlrinnen, die sich asymptotisch gegen die Hauptachse verzüngen; jede Rinne hat mit der folgenden eine Rückkehrkante gemein. Die Schnitte der Fläche mit einer beliebigen, durch die Hauptachse begrenzten Halbebene haben daher die Gestalt einer Schleifenkurve, die asymptotisch zur Achse verläuft. Die weitesten Schlingen liegen in vier Ebenen, die die Fläche senkrecht schneiden,

¹⁾ H. Sievert, Über die Zentralflächen der Enneperschen Flächen konstanten Krümmungsmaßes. Diss., Tübingen 1886, Kap. VI.

während die engsten für die Fläche Rückkehrkanten sind (vgl. Fig. 2).

Die Formeln, die die Fläche darstellen, und die wir so gleich angeben werden, enthalten einen Parameter C , der gleich 3 gewählt werden muß, um das Modell zu erhalten.

Die Gestalt der Fläche legt nun den Gedanken nahe, man könne den Parameter C so wählen, daß der viergliedrige Zyklus zweigliedrig wird und die Fläche dann in zwei einander berührende Kugelflächen ausartet.

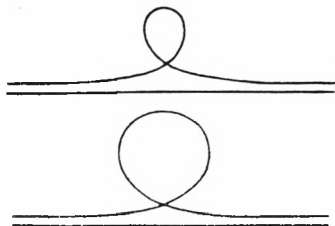


Fig. 2

Die analytische Darstellung¹⁾ der Fläche mit dem Krümmungsmaß a^2 ist in Zylinderkoordinaten (ϱ, z, ψ) gegeben durch

$$\varrho = 2a \sqrt{\frac{C+1}{C}} \frac{\sqrt{1+C \sin^2 w}}{C+1-C \sin^2 \varphi \cos^2 w} \sin \varphi,$$

$$z = \frac{a}{\sqrt{C}} \left\{ \lg \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{2(C+1) \cos \varphi}{C+1-C \sin^2 \varphi \cos^2 w} \right\},$$

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{C+1}} w + \operatorname{arctg} (\sqrt{C+1} \operatorname{tg} w).$$

Die xy -Ebene ist hier die Symmetrie-Ebene, die z -Achse die Hauptachse der Figur. Man erhält die Rückkehrschnitte,

¹⁾ H. Sievert, Über Flächen von konstantem positiven Krümmungsmaß (Abhandlungen zu den durch die Verlagshandlung von L. Brill veröffentlichten Modellen, 17. Serie, Nr. 3). — Eine Unstimmigkeit zwischen der Dissertation und dem Modell hat Herr Konrektor Dr. Sievert brieflich aufgeklärt. Das Modell stellt die vier Eiflächen der bis zur hypocykloiden-artigen Doppelkurve und ist aus einer Anzahl von berechneten ebenen Krümmungslinien durch Ausfüllen mit Modellierwachs gewonnen. Bei der Ausführung in Gips sind die Eiflächen auch längs der Doppelkurve abgerundet worden, wodurch leicht eine falsche Vorstellung entsteht; es wird statt der als Ansatz zu betrachtenden Doppelkurve eine Kurve vorgetäuscht, die für die Fläche keine Singularität bedeutet, sondern längs deren die Fläche die xy -Ebene senkrecht schneidet.

wenn man $w = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ setzt und die Maximalschleifen werden durch die Meridianebenen $w = n\pi$ geliefert. Zur Ergänzung sei noch erwähnt, daß die Meridianschnitte ebene Krümmungslinien sind, längs deren die Fläche die Meridianebene unter dem konstanten, durch

$$\sin \tau = \frac{\cos w}{\sqrt{1 + C \sin^2 w}}$$

gegebenen Winkel τ schneidet, während die zweite Schar von Krümmungslinien $\varphi = \text{konst.}$ auf Kugeln liegen, welche die Fläche senkrecht schneiden. Die z -Achse ist der Ort der Mittelpunkte dieser Kugeln.

Der äußere, epicykloidsche Ast der Spur auf der xy -Ebene ist durch $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gegeben, der innere, also die hypocykloidenartige Doppelkurve wird durch die Beziehung zwischen φ und w gegeben, die man durch Nullsetzen des Ausdrucks für z erhält. Der Charakter dieses Schnittes als Doppelkurve der Fläche ergibt sich daraus, daß mit

$$\varphi = f(w)$$

auch

$$\varphi = \pi - f(w)$$

eine Lösung von $z = 0$ ist.

2. Die Kugel als Grenzfall. Wir führen jetzt an Stelle von w und φ die Parameter v und u ein (wobei wir im Auge behalten, daß dann konstantes v bzw. u die ebenen und die sphärischen Krümmungslinien bedeutet), und zwar setzen wir

$$\operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{tg} v}{\sqrt{C + 1}},$$

$$\text{also} \quad \sin w = \frac{\sin v}{\sqrt{C \cos^2 v + 1}}, \quad \cos w = \frac{\cos v \sqrt{C + 1}}{\sqrt{C \cos^2 v + 1}}$$

$$\sqrt{1 + C \sin^2 w} = \frac{\sqrt{C + 1}}{\sqrt{C \cos^2 v + 1}},$$

und
$$\cot \varphi = \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{C+1}},$$

also
$$\cos \varphi = \frac{\sin u}{\sqrt{C \cos^2 u + 1}}, \quad \sin \varphi = \frac{\cos u \sqrt{C+1}}{\sqrt{C \cos^2 u + 1}}.$$

Es wird dann

$$\begin{aligned} C+1 - C \sin^2 C \cos^2 w &= (C+1) \frac{((C \cos^2 u + 1)(C \cos^2 v + 1) - C(C+1) \cos^2 u \cos^2 v)}{(C \cos^2 u + 1)(C \cos^2 v + 1)} \\ &= (C+1) \frac{(C(\cos^2 u + \cos^2 v - \cos^2 u \cos^2 v) + 1)}{(C \cos^2 u + 1)(C \cos^2 v + 1)}. \end{aligned}$$

Wenn man jetzt C unbegrenzt wachsen läßt, so erhält man asymptotisch:

$$\sqrt{1 + C \sin^2 w} \approx \frac{1}{\cos v}, \quad \sin \varphi \approx 1, \quad \cos \varphi \approx \frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{tg} u$$

und
$$C+1 - C \sin^2 C \cos^2 w \approx \frac{N}{\cos^2 u \cos^2 v},$$

wobei gesetzt ist

$$N = \cos^2 u + \cos^2 v \sin^2 u.$$

Diese asymptotischen Formeln liefern weiter

$$\varrho \approx \frac{2 a \cos^2 u \cdot \cos v}{N},$$

$$z \approx \frac{2 a \sin u \cos u \cos^2 v}{N},$$

$$\psi \approx v.$$

Dies gibt in rechtwinkligen Koordinaten die Fläche

$$x = \varrho \cos v = \frac{2 a \cos^2 u \cos^2 v}{N},$$

$$y = \varrho \sin v = \frac{2 a \cos^2 u \cos v \sin v}{N},$$

$$z = \frac{2 a \sin u \cos u \cos^2 v}{N}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{4 a^2 (\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 u \cos^4 v)}{N^2} \\ &= \frac{4 a^2 \cos^2 u \cos^2 v}{N}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$2 a x = \frac{4 a^2 \cos^2 u \cos^2 v}{N},$$

so daß man erhält:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 a x = 0.$$

Läßt man also C unbegrenzt wachsen, so geht der von den Meridianebenen $\varphi = \mp \frac{\pi}{2}$ begrenzte Teil über in eine Kugel vom Radius a , die die z -Achse im Nullpunkt berührt und die ihren Mittelpunkt auf der x -Achse hat.

Es mag der Vollständigkeit halber noch bemerkt werden, daß im Grenzfall die ebenen Krümmungslinien in die Kreise der Kugel übergehen, die die z -Achse berühren, während die sphärischen ($u = \text{konst.}$) wegen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 a z \cotg u = 4 a^2 \frac{\cos^2 u \cos^2 v}{N} - 4 a^2 \frac{\cos^2 u \cos^2 v}{N} = 0$$

auf Kugeln liegen, deren Mittelpunktstort die z -Achse ist und die die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 a x = 0,$$

die ausgeartete cyklische Ennepersche Fläche senkrecht schneiden, genau, wie dies eben für die Enneperschen Flächen „mit ebenen und sphärischen Krümmungslinien“ charakteristisch ist.

Vielleicht ist zum Schluß noch ein erläuterndes Wort angebracht über den *Verbiegungsvorgang*, der eine Kugel mit beliebig kleinem Loch in eine cyklische Enneperfläche verwandelt.

Die Kugel vom Radius a wird in die Lage gebracht, daß der Mittelpunkt des Loches, das wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Kreis mit dem sphärischen Radius ε wählen dürfen, der Koordinatenanfang ist und die ergänzte Kugel

daselbst die z -Achse berührt, ihr Mittelpunkt auf der x -Achse liegt. Sodann nimmt man den Parameter C der cyklischen Enneperfläche mit dem Krümmungsmaß a^2 so groß an ($C = C_1$), daß die bei der isometrischen Zuordnung von Kugel und Enneperfläche dem Lochrand entsprechende Kurve die innere, der z -Achse zugewandte Grenze eines singularitätenfreien Stückes der Enneperfläche ist, daß also außerhalb kein Stück der Rückkehrkante oder der Doppelkurve liegt.

Läßt man jetzt $1 : C$ von 0 bis $1 : C_1$ wachsen, so geben die Sievertschen Formeln für ϱ , ψ und z den *Verbiegungsvorgang* an, der die mit Loch versehene Kugelfläche in ein anderes, nicht mit ihr kongruentes Flächenstück überführt.

Zum Schluß darf die Vermutung ausgesprochen werden, daß der Satz von der Nichtverbiegbarkeit geschlossener Eiflächen in ganz entsprechender Weise zu ergänzen ist, daß also eine Eifläche mit beliebig kleinem Loch verbogen werden kann. Bis zum Beweis dieses Satzes dürfte aber noch ein weiter Weg sein; ließ sich doch der hier behandelte einfachste Spezialfall, die Kugel, nur erledigen durch die Heranziehung der Enneper'schen Flächen in der Form, wie sie für Rechnung und räumliche Vorstellung gefördert worden ist durch die Arbeiten von Sievert.