

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960



MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Konstruktion der Krümmungskreise des scheinbaren Umrisses einer Fläche bei Zentral- oder Parallelprojektion

Von Hermann Schaal in Stuttgart

Mit 12 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 12. November 1960

Übersicht

1. Vorbemerkung	277
2. Bestimmung von $\tilde{K}$ im Fall senkrechter Parallelprojektion	279
3. Bestimmung von $\tilde{K}$ bei Zentralprojektion und bei schiefer Parallelprojektion	286
4. Beispiele	288
5. Ausblick auf weitere Anwendungen	308
Literaturverzeichnis	310

1. Vorbemerkung

Bei Zentral- oder Parallelprojektion einer Fläche Φ ¹ auf eine Bildebene π sind der wahre Umriß (U) von Φ , (in dessen Punkten die Fläche Φ von Projektionsstrahlen berührt wird)² und seine Projektion, der scheinbare Umriß ($\tilde{U}$) von Φ , von besonderem Interesse. In der vorliegenden Arbeit wird eine Konstruktion der Krümmungskreise des scheinbaren Umrisses ($\tilde{U}$) einer Fläche Φ unter ganz allgemeinen Voraussetzungen hergeleitet und an einigen Beispielen vollständig durchgeführt.

¹ Die Fläche Φ mit der Parameterdarstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ sei im Bereich $\mathfrak{B}(u, v)$ glatt und stetig gekrümmt.

² Im folgenden wird (U) reell vorausgesetzt.

Im Fall der senkrechten Parallelprojektion hat A. Mannheim 1880 eine Formel angegeben (vgl. [7] S. 309), nach der sich die Krümmungsradien von $(\bar{U})$ bestimmen lassen. Es sei P ein Punkt von (U) , $\bar{P}$ seine Projektion. Der Krümmungsradius $\bar{R}$ des scheinbaren Umrisses $(\bar{U})$ im Punkt $\bar{P}$ hängt ab von den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 der Fläche Φ im Punkt P und vom Winkel φ , den die Projektionsrichtung mit der zu R_1 gehörenden Hauptkrümmungsrichtung bildet. Es gilt nach A. Mannheim

$$(1) \quad \bar{R} = R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi. \quad ^3$$

Die konstruktive Bestimmung von $\bar{R}$ nach der Beziehung (1) hat den Nachteil, daß schon bei verhältnismäßig einfachen Flächen die Konstruktion der Hauptkrümmungsrichtungen und der zugehörigen Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 einen ziemlichen Aufwand an Zeichenarbeit erfordern kann. Außerdem gilt (1) im allgemeinen nur im Fall senkrechter Parallelprojektion.

Die im folgenden hergeleitete, sehr einfache Beziehung (2) (s. u.) bedarf weniger an Voraussetzungen als (1) und gilt nicht nur bei senkrechter Parallelprojektion, sondern auch bei schiefer Parallelprojektion und bei Zentralprojektion. Es wird dabei von zwei durch den Umrißpunkt P gezogenen Flächenkurven (C_1) und (C_2) ausgegangen, deren Tangenten t_1 und t_2 in P konjugiert sind (Abb. 1). Im übrigen können (C_1) und (C_2) – von kleinen Einschränkungen abgesehen – beliebig gewählt sein.⁴ Die Krümmungsradien ihrer Projektionen $(\bar{C}_1)$ und $(\bar{C}_2)$ im Punkt $\bar{P}$ seien $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$. Dann gilt

$$(2) \quad \bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2.$$

Im Fall senkrechter Parallelprojektion läßt sich (2) noch in anderer Form darstellen, vgl. (13) S. 283, aus der sich (1) unmittelbar als Sonderfall ergibt.

³ Diese Beziehung wurde auch von Blaschke [2] S. 118 und von Kruppa [5] S. 114 jeweils in anderer Weise hergeleitet.

⁴ Die betrachteten Flächenkurven seien in einer Umgebung des Punktes P glatt und stetig gekrümmt; keine ihrer Tangenten sei Projektionsstrahl oder Haupttangente von Φ in P .

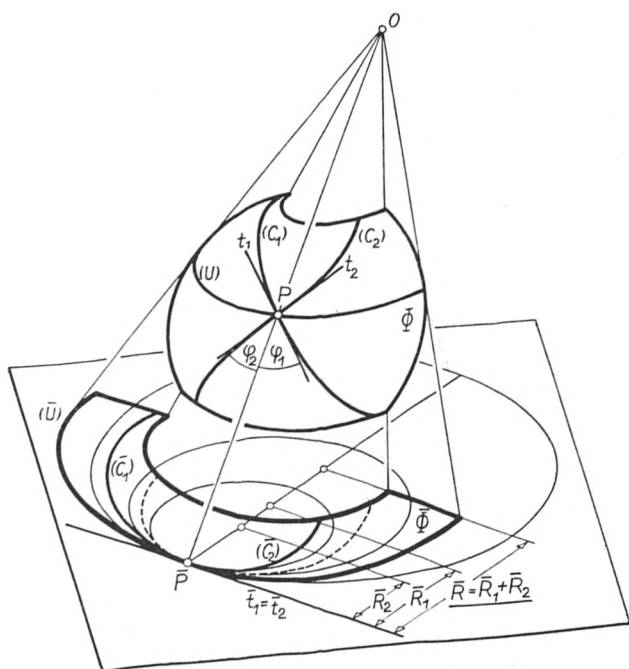


Abb. 1

2. Bestimmung von $\bar{R}$ im Fall senkrechter Parallelprojektion

Die Beziehung (2) werde zunächst im Fall senkrechter Parallelprojektion von Φ bewiesen.⁵ Zur Vorbetrachtung sei durch den Punkt P des wahren Umrisses (U) von Φ eine beliebige Flächenkurve (C_1) gezogen,⁴ deren Tangente t_1 in P mit der Projektionsrichtung den Winkel φ_1 ($0 < \varphi_1 < \pi$) einschließe

⁵ Man könnte (2) auch sofort ganz allgemein für Zentralprojektion beweisen (es sind dazu nur kleine Abänderungen einiger Beweisschritte erforderlich, vgl. Fußnote 11 S. 286). Wegen der besonderen Bedeutung der senkrechten Parallelprojektion in der Darstellenden Geometrie wird jedoch der vorliegende Weg gewählt. Außerdem gilt Satz 3 S. 283 im allgemeinen auch nur für senkrechte Parallelprojektion.

Läßt man zur Erweiterung von Satz 1 noch zu, daß t_1 eine vom Projektionsstrahl verschiedene Haupttangente von Φ in P ist, so sind zwei Fälle zu betrachten:

a) Im Punkt P ist die Tangentialebene von Φ zugleich Schmiegeebene von (C_1) . Der Projektionsstrahl durch P liegt dann in dieser Schmiegeebene. Daher hat die Projektion $(\bar{C}_1)$ in $\bar{P}$ eine (mindestens) dreipunktig berührende Tangente.

b) Im Punkt P ist die Tangentialebene von Φ nicht Schmiegeebene von (C_1) . Dann ist der Krümmungskreis von (C_1) in P ausgeartet zur (mindestens) dreipunktig berührenden Tangente t_1 . Wegen der Invarianz der Berührungsordnung hat daher auch die Projektion $(\bar{C}_1)$ in $\bar{P}$ eine (mindestens) dreipunktig berührende Tangente.

Demnach gilt der

Satz 1 a. Die Projektionen aller Flächenkurven, die im Punkt P des wahren Umrisses einer Fläche als gemeinsame Tangente eine vom Projektionsstrahl verschiedene Haupttangente der Fläche besitzen, haben in $\bar{P}$ verschwindende Krümmung.

Zum Beweis von (2) sind zwei Flächenkurven (C_1) und (C_2) zu betrachten, die in P konjugierte Tangenten t_1, t_2 haben. Entsprechend zu (3) gilt für (C_2) in sinngemäßer Bedeutung der Bezeichnungen

$$(4) \quad \bar{R}_2 = R_2^* \sin^2 \varphi_2, \quad 0 < \varphi_2 < \pi.$$

Zunächst sei P ein elliptischer oder ein hyperbolischer Flächenpunkt auf Φ , und je nachdem sei $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$. In einem schiefwinkligen Parallelkoordinatensystem (x, y) , dessen

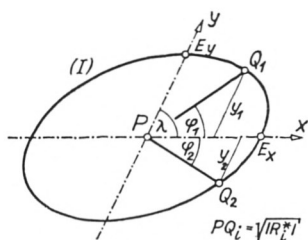


Abb. 3a

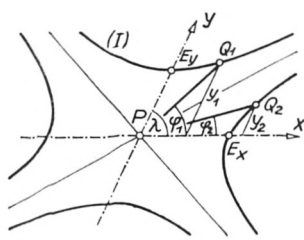


Abb. 3b

Achsen konjugierte Durchmesser der Dupinschen Indikatrix (I) von Φ im Punkt $P(0, 0)$ sind, und dessen Einheitspunkte $E_x(1, 0)$ und $E_y(0, 1)$ auf (I) liegen (Abb. 3 a und 3 b S. 281), lautet die Gleichung von (I)

$$(5) \quad |x^2 + \varepsilon y^2| = 1.$$

Sind PQ_i ($i = 1, 2$) zwei konjugierte Halbmesser von (I) mit den Richtungen t_i , dann besteht zwischen den Koordinaten x_i, y_i von Q_i die Beziehung

$$(6) \quad |x_2| = |y_1|.$$

Setzt man x_2, y_2 in (5) ein, so folgt mit (6)

$$(7) \quad |y_1^2 + \varepsilon y_2^2| = 1.$$

Ist die x -Achse der Projektionsstrahl des Punktes P , und wird $PQ_i = \sqrt{|R_i^*|}$ im Maßstab der y -Achse gemessen, dann gilt mit $\lambda = \angle(x, y)$ nach dem Sinussatz

$$(8) \quad \sqrt{|R_i^*|} \sin \varphi_i = |y_i| \sin \lambda.$$

Durch Eliminieren von $|R_i^*| \sin^2 \varphi_i$ aus (3) bzw. (4) und (8) erhält man

$$(9) \quad |\bar{R}_i| = y_i^2 \sin^2 \lambda.$$

Damit gibt (7)

$$(10) \quad ||\bar{R}_1| + \varepsilon |\bar{R}_2|| = \sin^2 \lambda.$$

Da $\bar{R}_i$ gemäß (3) mit demselben Vorzeichen zu versehen ist wie R_i^* , und da R_1^*, R_2^* in einem elliptischen Punkt P gleiche, in einem hyperbolischen Punkt P verschiedene Vorzeichen haben, gilt

$$(11) \quad |\bar{R}_1 + \bar{R}_2| = \sin^2 \lambda.$$

Die Konstante $\sin^2 \lambda$ hat folgende geometrische Bedeutung. Der den wahren Umriß (U) von Φ projizierende Zylinder berührt

Φ längs (U) . Nach einem Satz von Dupin⁷ ist daher die y -Achse Tangente von (U) in P . Da der Krümmungsradius des die y -Achse enthaltenden Normalschnittes von Φ im System (x, y) den Wert $PE_y^2 = 1$ hat, folgt für den Krümmungsradius $\bar{R}$ von $(\bar{U})$ entsprechend zu (9)

$$(12) \quad |\bar{R}| = \sin^2 \lambda.$$

Aus (11) und (12) folgt (unabhängig von der Wahl des Maßstabes) nach geeigneter Festsetzung des Vorzeichens von $\bar{R}$ die in 1. behauptete Beziehung

$$(2) \quad \bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2.$$

Es gilt also

Satz 2. Sind durch den Punkt P des wahren Umrisses (U) einer Fläche Φ zwei beliebige Kurven (C_1) und (C_2) gezogen, deren Tangenten in P konjugiert sind (vgl. Fußnote 4), dann ist im Punkt $\bar{P}$ der Krümmungsradius $\bar{R}$ des scheinbaren Umrisses $(\bar{U})$ von Φ gleich der algebraischen Summe der Krümmungsradien der Projektionen von (C_1) und (C_2) .

In 3. wird gezeigt, daß Satz 1 und Satz 2 auch bei schiefer Parallelprojektion und bei Zentralprojektion von Φ gelten. Dagegen gilt der nachstehende Satz 3, der aus (2), (3) und (4) unmittelbar folgt, im allgemeinen nur bei senkrechter Parallelprojektion.

Satz 3. Der Krümmungsradius $\bar{R}$ des scheinbaren Umrisses $(\bar{U})$ einer Fläche Φ in einem Punkt $\bar{P}$ ergibt sich aus den Krümmungsradien R_1^* , R_2^* konjugierter Normalschnitte im Punkt P und aus den Winkeln φ_1 , φ_2 dieser Normalschnitte gegen die Projektionsrichtung nach der Beziehung

$$(13) \quad \bar{R} = R_1^* \sin^2 \varphi_1 + R_2^* \sin^2 \varphi_2.$$

⁷ Satz von Dupin: Wird eine Fläche Φ längs einer Flächenkurve (C) von einer abwickelbaren Fläche berührt, dann sind die Tangenten von (C) und die Erzeugenden der abwickelbaren Fläche in den Punkten von (C) konjugiert.

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß (13) eine Verallgemeinerung der Beziehung (1) von A. Mannheim ist, denn sind in (13) R_1^* , R_2^* speziell die Hauptkrümmungsradien von Φ im Punkt P , so geht (13) über in (1).⁸

Ist P ein parabolischer Flächenpunkt auf (U) mit den Hauptkrümmungen $1:R_1 \neq 0$, $1:R_2 = 0$, dann sind in P alle Tangenten zur Hauptkrümmungsrichtung von R_2 konjugiert. Diese

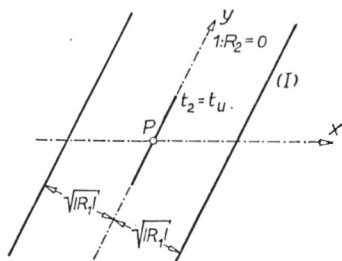


Abb. 4

sei mit y bezeichnet (Abb. 4). Nach dem Satz von Dupin liegt demnach die Tangente t_u an (U) im Punkt P für alle von y verschiedenen Projektionsrichtungen in y -Richtung. Nach Satz 1 a hat $(\bar{U})$ in $\bar{P}$ also die Krümmung

$$(13') \quad 1:\bar{R} = 0.$$

Dies steht ganz im Einklang mit Satz 2 und Satz 3, denn von den konjugierten Tangenten t_1 , t_2 von (C_1) , (C_2) im parabolischen Punkt P besitzt zumindest eine die y -Richtung, etwa t_2 ; dann ist nach Satz 1 a $1:\bar{R}_2 = 0$. Da auch $1:R_2^* = 0$ ist, bleiben ohne Einfluß von $\bar{R}_1$ und R_1^* die Beziehungen (2) und (13) auch im Fall eines parabolischen Punktes P richtig. Der scheinbare Umriß $(\bar{U})$ kann in $\bar{P}$ einen Wendepunkt oder einen Flachpunkt

⁸ Eine entsprechende Verallgemeinerung der Formel von L. Euler

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2},$$

die als „duals Gegenstück“ zu (1) angesehen werden kann, hat der Verfasser in [10] hergeleitet.

besitzen (jeweils auch von höherer Ordnung). Dies hängt ab vom Verhalten der Fläche Φ in der Umgebung des parabolischen Punktes P , für das bekanntlich 4 Grundfälle möglich sind (vgl. z. B. K. Strubecker [11] Bd. III S. 48).

Der bei hyperbolisch gekrümmten Flächen mögliche Fall, daß $\bar{R} = 0$ wird, verdient besondere Beachtung. A. Mannheim (vgl. [7] S. 309) hat darauf hingewiesen, daß $\operatorname{tg}^2 \varphi = -R_2:R_1$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden von $\bar{R}$ ist und daß die Projektionsrichtung demnach Haupttangentialrichtung der Fläche im Punkt P ist. Da die Haupttangentialen zu sich selbst konjugiert sind, wird der wahre Umriß (U) in diesem Fall in Richtung seiner Tangente projiziert. Seine Projektion ($\bar{U}$) hat in $\bar{P}$ daher im allgemeinen eine Spitze.⁹ Es gibt jedoch auch Fälle, bei denen $\bar{P}$ ein Spitzpunkt von ($\bar{U}$) oder ein isolierter Punkt von ($\bar{U}$) ist.¹⁰

Durch Spezialisierung von Satz 2 ergibt sich ein Sonderfall eines bekannten Satzes der ebenen Kinematik. Auf einer Schiebfläche Φ bilden die beiden Scharen der kongruenten Erzeugenden ein konjugiertes Netz. Die senkrechte oder schiefe Parallelprojektion dieses Netzes wird von zwei Scharen paralleler kongruenter ebener Kurven gebildet. Jede dieser beiden ebenen Kurvenscharen läßt sich auch dadurch erzeugen, daß irgendeine Kurve der einen Schar längs irgendeiner Kurve der anderen Schar parallel verschoben wird. Die dabei auftretende Hüllbahn der bewegten Kurve ist der scheinbare Umriß ($\bar{U}$) von Φ . Der Krümmungsradius dieser Hüllbahn ergibt sich daher nach Satz 2 als algebraische Summe der Krümmungsradien der festen und der längs dieser parallel verschobenen Kurve. Da der Krümmungsmittelpunkt eines Punktes der bewegten Kurve eine zur festen Kurve kongruente Bahnkurve durchläuft, ergibt sich so ein Sonderfall des bekannten, von A. Reuschel [8] S. 17 in folgender Weise formulierten Satzes der ebenen Kinematik: Der Krümmungsmittelpunkt der zu einer Systemkurve (d. h. der

⁹ Der Verfasser hat gezeigt (vgl. [9] S. 170ff.), wie sich die bei Parallelprojektion von Regelschraubenflächen möglicherweise auftretenden Spitzen des scheinbaren Umrisses konstruieren lassen.

¹⁰ Beispiele dazu finden sich in [9], Abb. 22b S. 176 bzw. Abb. 21b S. 175; dort Bezeichnung $\bar{A}$ statt $\bar{P}$.

bewegten Kurve) gehörigen Hüllbahn für ihren augenblicklichen Berührungspunkt ist zugleich auch der Krümmungsmittelpunkt derjenigen Bahnkurve, die von dem zum Berührungspunkt gehörigen Krümmungsmittelpunkt der Systemkurve beschrieben wird.

3. Bestimmung von $\bar{R}$ bei Zentralprojektion und bei schiefer Parallelprojektion

Der in 2. für den speziellen Fall senkrechter Parallelprojektion geführte Beweis von (2) läßt sich ohne wesentliche Schwierigkeiten auch auf den allgemeinen Fall einer Zentralprojektion und auf den Fall einer schiefen Parallelprojektion übertragen.¹¹ Nachdem jedoch (2) für die senkrechte Parallelprojektion bereits bewiesen ist, liegt es nahe, den folgenden Weg einzuschlagen, der zudem den Vorzug besonderer Anschaulichkeit hat.

Das (eigentliche oder uneigentliche) Projektionszentrum O , die Projektionsebene π sowie die Fläche Φ seien gegeben. Dabei sei (U) der wahre Umriß von Φ und P ein Punkt auf (U) . Durch P seien auf Φ zwei Kurven (C_i) gezogen (vgl. Fußnote 4), deren Tangenten t_i in P konjugiert sind in bezug auf Φ (Abb. 5). Durch eine perspektive Kollineation $\mathfrak{K}$ des Raumes, die π als Perspektivitätsebene besitzt und die den Punkt O dem uneigentlichen Punkt O'_u der Lotrichtung von π zuordnet,¹² wird die Fläche Φ auf eine Fläche Φ' abgebildet. Die Kurven (U) und

¹¹ Es ändern sich zunächst die Formeln (3) und (4), und zwar kommen bei jeder auf der rechten Seite noch zwei Faktoren hinzu. Ist O das Projektionszentrum, so ist der eine Faktor $OP:OP$; im Fall schiefer Parallelprojektion ist für diesen der Wert 1 zu setzen. Ist φ der Winkel, den die Spur der Tangentialebene von Φ in P mit dem Projektionsstrahl durch P bildet, und θ der Neigungswinkel der Flächennormale von Φ in P gegen die Projektionsebene, dann ergibt sich nach den Sätzen von Euler und Meusnier der zweite Faktor zu $\cos \theta : \sin^2 \varphi$ (vgl. (29) S. 306). Entsprechend zu (5) bis (12) zeigt sich, daß die beiden Faktoren auch auf den rechten Seiten von (9) bis (12) auftreten. Beim Gleichsetzen der linken Seiten von (11) und (12) heben sich die Faktoren heraus, und es gilt (2).

¹² Das Projektionszentrum Z von $\mathfrak{K}$ kann dabei bekanntlich auf OO'_u beliebig, aber von O und O'_u verschieden angenommen werden; dann liegt die Kollineation fest.

4. Beispiele

In den folgenden Beispielen wird für einige besondere Flächen die Konstruktion von $\bar{R}$ jeweils in einem nicht speziellen Punkt $\bar{P}$ von $(\bar{U})$ mit den Methoden der Konstruktiven Geometrie¹³ vollständig durchgeführt. Für spezielle Punkte $\bar{P}$ (z. B. in symmetrischen Scheiteln von $(\bar{U})$) wird die Konstruktion von $\bar{R}$ meist besonders einfach. Die vorausgehende Konstruktion des Punktes $\bar{P}$ und der Tangente von $(\bar{U})$ in $\bar{P}$ wird als bekannt erachtet und daher nur sehr kurz beschrieben.

1. Beispiel

Die senkrechte Parallelprojektion $\bar{\Phi}$ (Normalriß) einer durch die Achse a und den Meridian (M) gegebenen Drehfläche Φ in allgemeiner Lage (Abb. 6: Projektionsebene π , Projektions-

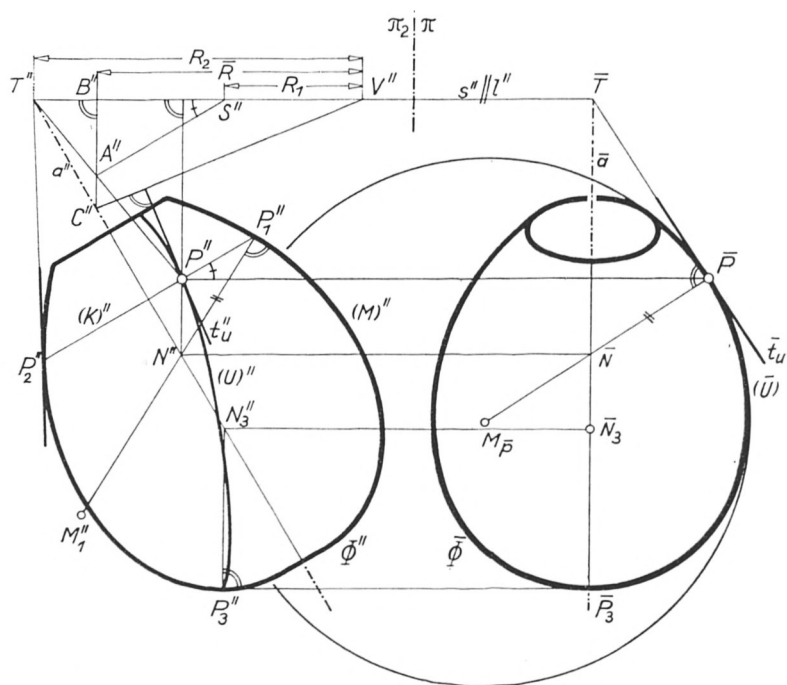


Abb. 6

¹³ Vgl. die trefflichen Vorworte in den Lehrbüchern von E. Kruppa [5] und F. Hohenberg [3].

richtung $l \perp \pi$) kann aufgefaßt werden als Kreuzriß Φ''' von Φ , wobei a in der Aufrißebene π_2 liegt und gegen die Kreuzrißebene π geneigt ist.¹⁴ Zur punktwisen Konstruktion des scheinbaren Umrisses ($\bar{U}$) im Normalriß geht man in bekannter Weise zweckmäßig vom Aufriß (K)'' eines Parallelkreises (K) von Φ aus, auf dem ein reeller Punkt P des wahren Umrisses (U) liegt. Die Normalen von Φ in den Punkten von (K) schneiden sich im Punkt N der Achse a . Da $l \parallel \pi_2$ und $PN \perp l$ ist, folgt $P''N'' \perp l''$. Der Normalenabschnitt PN erscheint daher im Normalriß in wahrer Größe $\bar{P}\bar{N} = P_1''N''$. Die Tangentialebene τ von Φ in P wird im Normalriß als Tangente $\bar{t}_u$ an ($\bar{U}$) in $\bar{P}$ projiziert. Daher ist $\bar{P}\bar{N}$ Normale von ($\bar{U}$) in $\bar{P}$. Auf dieser muß der Mittelpunkt $M_{\bar{P}}$ des gesuchten Krümmungskreises von ($\bar{U}$) in $\bar{P}$ liegen.

Im Punkt P sei R_1 der Hauptkrümmungsradius von Φ , der zur Parallelkreistangente t_1 gehört, und entsprechend sei R_2 der zur Meridiantangente t_2 gehörige Hauptkrümmungsradius von Φ . In Abb. 6 sind $R_1 = P_1''N''$ und $R_2 = P_1''M_1''$ gegeben zu denken. Die Parallele zu l durch die Spitze T des Drehkegels, der Φ längs (K) berührt, ist die Aufrißspur s der Tangentialebene τ von P . Wird τ um s in die Aufrißebene herein gedreht, so geht das Zweibein P, t_1, t_2 über in P_0, t_{10}, t_{20} (Abb. 7).

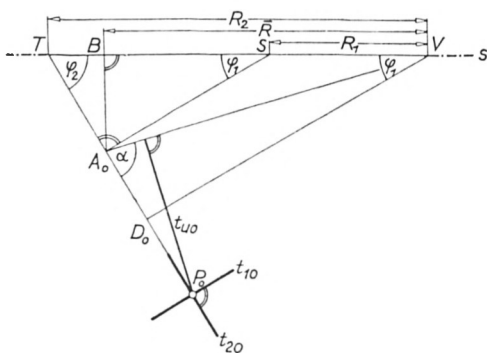


Abb. 7

¹⁴ Vgl. z. B. F. Hohenberg [3] S. 177; dabei sind Kreuzriß und Aufriß zu vertauschen.

Die Winkel $\varphi_i = \sphericalangle (s, t_{10})$ ($i = 1, 2$) erscheinen dann in wahrer Größe.

Der Krümmungsradius $\bar{R}$ von $(\bar{U})$ in $\bar{P}$ kann nun aus φ_i und R_i mit Hilfe der Beziehung (1) von A. Mannheim wie folgt konstruiert werden.

Aus (1) folgt mit $\varphi = \varphi_1$ (oder auch aus (13) mit $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$, $R_1^* = R_1$, $R_2^* = R_2$)

$$(14) \quad \bar{R} = (R_2 - R_1) \cos^2 \varphi_1 + R_1.$$

Werden R_2 und R_1 im Fall eines elliptischen Flächenpunktes P wie in Abb. 7 ($R_2 > R_1$) auf s abgetragen, so ist $TS = R_2 - R_1$. Das rechtwinklige Dreieck STA_0 hat die Winkel $\sphericalangle A_0ST = \varphi_1$, $\sphericalangle STA_0 = \varphi_2$ und den Hypotenusenabschnitt $BS = (R_2 - R_1) \cos^2 \varphi_1$. Nach (14) folgt daher $\bar{R} = BV$. Dies gilt gleichermaßen für $R_1 > R_2$. Im Fall eines hyperbolischen Flächenpunktes P ist $|R_1|$ von V aus in der anderen Richtung abzutragen. Beim Zurückdrehen der Tangentialebene um s in die Ausgangslage ($P_0 \rightarrow P$) bleiben die Punkte $TBSV$ auf s fest. TP_0 geht in TP und A_0 in A über. SA ist parallel zur Tangente t_1 von (K) in P . Daher ist $S''A''$ parallel $(K)''$. Bei der Drehung bleibt $A''B'' \perp s''$. Daraus ergibt sich – ohne daß die Drehung von τ um s konstruktiv auszuführen ist – folgende

Konstruktion von $\bar{R}$ für einen beliebigen Punkt $\bar{P}$ von $(\bar{U})$
(Abb. 6)

Auf der Spur s der Tangentialebene τ des Punktes P werden im Aufriß $R_2 = P_1''M_1'' = T''V''$ und $R_1 = P_1''N'' = V''S''$ so abgetragen, daß im Fall eines elliptischen Flächenpunktes P $T''S'' = ||R_2| - |R_1||$, im Fall eines hyperbolischen Flächenpunktes P $T''S'' = |R_2| + |R_1|$ ist. Die Parallele zu $(K)''$ durch S'' schneidet $T''P''$ in A'' . Das Lot von A'' auf s'' hat den Fußpunkt B'' . Dann ist $\bar{R} = B''V''$.

Im untersten Punkt P_3 von Φ (Abb. 6) hat die Tangentialebene von Φ Profillage. Die angegebene Konstruktion von $\bar{R}$

läßt sich daher für P_3 nicht ohne Modifikation ausführen. Dies ist jedoch kein Nachteil, da sich $\bar{R}$ in diesem Fall sehr einfach folgendermaßen bestimmen läßt. Der Projektionsstrahl von P_3 ist Tangente an den in π_2 liegenden Meridian von Φ ; also ist $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. Aus (14) folgt also $\bar{R} = R_1$. Da aber R_1 gleich dem Normalenabschnitt $P_3 N_3$ des Meridians von Φ ist, und da $P_3 N_3$ parallel π liegt, so ist $\bar{N}_3$ der Krümmungsmittelpunkt von $(\bar{U})$ im Scheitel $\bar{P}_3$. – Dieses Ergebnis erhält man auch aus folgender geometrischer Überlegung. Der Krümmungsmittelpunkt von $(\bar{U})$ in $\bar{P}_3$ ist nach einer der möglichen Definitionen die Grenzlage des Schnittpunktes $\bar{N}$ der Normale $\bar{P}\bar{N}$ und der festen Normale in $\bar{P}_3$ für $\bar{P} \rightarrow \bar{P}_3$. Da PN immer parallel π ist, läßt sich die Grenzlage N_3 von N für $P \rightarrow P_3$ längs (U) im Aufriß sofort angeben (Abb. 6), und daraus ergibt sich unmittelbar die Grenzlage $\bar{N}_3$ von $\bar{N}$.

Ist P auf (U) ein Äquatorpunkt von Φ , so wird T der uneigentliche Punkt der Achse a . Die von PT und dem Projektionsstrahl durch P aufgespannte Tangentialebene von Φ ist in diesem Fall parallel zur Aufrißebene π_2 . Die Winkel φ_1, φ_2 projizieren sich also in wahrer Größe. Daher läßt sich $\bar{R}$ auch in diesem Fall gemäß Abb. 7 konstruieren, wenn statt T ein beliebiger Punkt von a gewählt wird.

Die Tangente t_u von (U) in P erhält man im Aufriß durch folgende Überlegung. Im Punkt P sind t_u und die Projektionsrichtung l konjugiert in bezug auf Φ . Ist $\alpha = \sphericalangle(t_1, t_u)$, so gilt die bekannte Beziehung für konjugierte Richtungen

$$(15) \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi_1.$$

In Abb. 7 ist $A_0 D_0 = R_1 \sin \varphi_1$, $D_0 V = R_2 \cos \varphi_1$. Wegen (15) ist also $\alpha = \sphericalangle V A_0 D_0$. Das Lot von P_0 auf $A_0 V$ bildet also mit der Umklappung t_{10} von t_1 den Winkel α (und zwar in dem durch das Vorzeichen in (15) festgelegten Sinn). Für die Ausgangslage der Tangentialebene ergibt sich also $t_u \perp AV$. Um auch hier die lästige Drehung der Tangentialebene τ um s in die Aufrißebene zu vermeiden, wird die Lotebene λ von t_u im Punkt A betrachtet (Abb. 6). Sie enthält die Gerade AV (da

$t_u \perp AV$ ist) und die Parallele AC zu PN durch A (da $t_u \perp PN$ ist). Der Spurpunkt C von AC liegt auf der Spur a der Ebene TPN und außerdem, da $A''C'' \parallel P''N'' \parallel A''B''$ ist, auf $A''B''$. Der Spurpunkt von AV ist V . Daher ist CV die Aufrißspur von λ und demnach $t_u'' \perp C''V''$. Man hat also für einen nicht speziellen Punkt P'' die einfache

Konstruktion der Tangente t_u'' von $(U)''$

Die (bereits gezeichnete) Gerade $A''B''$ schneidet a'' in C'' . Das Lot von P'' auf $C''V''$ ist die gesuchte Tangente t_u'' .

Die Tangente an den Aufriß $(U)''$ im Punkt P_3'' ist nicht die Projektion der (zu π_2 senkrechten) Tangente an (U) in P_3 und läßt sich daher in der angegebenen Weise nicht bestimmen. Ihre Konstruktion erfordert weitergehende Untersuchungen, die in einer späteren Arbeit dargelegt werden sollen.

2. Beispiel

Der Parallelriß $\bar{\Phi}$ einer Schiebfläche Φ wird – gleichgültig, ob die Projektionsrichtung l zur Bildebene π senkrecht ist oder nicht – von zwei Scharen kongruenter und paralleler Kurven gebildet, welche die Bilder der beiden Scharen kongruenter und paralleler Schiebkurven von Φ sind. In Abb. 8 ist der Punkt $\bar{P}_1$ des scheinbaren Umrisses $(\bar{U})$ von Φ der Riß eines elliptischen Flächenpunktes P_1 . Die beiden Schiebkurven (C_i) ($i = 1, 2$) durch P_1 haben in P_1 bekanntlich konjugierte Tangenten. Die Krümmungsradien $\bar{R}_i = \bar{P}_1 \bar{M}_{1i}$ der Projektionen $(\bar{C}_i)$ von (C_i) im Punkt $\bar{P}_1$ seien bekannt.¹⁵ Dann ergibt sich der Krümmungsradius $\bar{R} = \bar{P}_1 \bar{M}_1$ von $(\bar{U})$ in $\bar{P}_1$ (Abb. 8) nach Satz 2 aus

$$(2) \quad \bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2.$$

¹⁵ Sind zunächst nur die Krümmungskreise (K_i) der Flächenkurven (C_i) in P_1 gegeben, so lassen sich die Krümmungsradien $\bar{R}_i$ von $(\bar{C}_i)$ in bekannter Weise z. B. als Krümmungsradien der Bildellipsen $(\bar{K}_i)$ von (K_i) in $\bar{P}_1$ bestimmen.

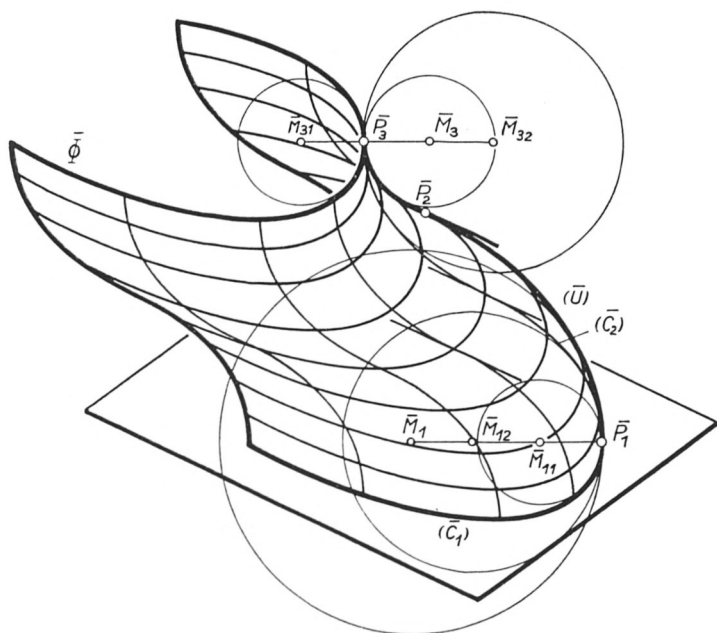


Abb. 8

In Abb. 8 ist der Punkt $\bar{P}_3$ von $(\bar{U})$ der Riß eines hyperbolischen Flächenpunktes P_3 . Der Krümmungsradius $\bar{R} = \bar{P}_3 \bar{M}_3$ von $(\bar{U})$ ergibt sich aus den Krümmungsradien $\bar{R}_i = \bar{P}_3 \bar{M}_{3i}$ der Projektionen der Scharkurven durch P_3 daher als Differenz

$$(2') \quad \bar{R} = |\bar{R}_2| - |\bar{R}_1|.$$

Schließlich ist der Umrißpunkt $\bar{P}_2$ in Abb. 8 das Bild eines parabolischen Flächenpunktes P_2 von Φ . Nach (13') verschwindet die Krümmung von $(\bar{U})$ in $\bar{P}_2$; daher ist $\bar{P}_2$ in Abb. 8 Wendepunkt von $(\bar{U})$.

3. Beispiel

Die durch ihre Schraubachse a , die Erzeugende e_0 und die reduzierte Ganghöhe k gegebene schiefe, offene nicht abwickel-

bare Regelschraubfläche Φ ist in Abb. 9 in allgemeiner Lage im Normalriß $\bar{\Phi}$ (Projektionsebene π , Projektionsrichtung $l \perp \pi$) und in spezieller Lage im Aufriß Φ'' (Aufrißebene $\pi_2 \perp \pi$, $\pi_2 \parallel a$) dargestellt. Die Konstruktion des Krümmungskreises des schein-

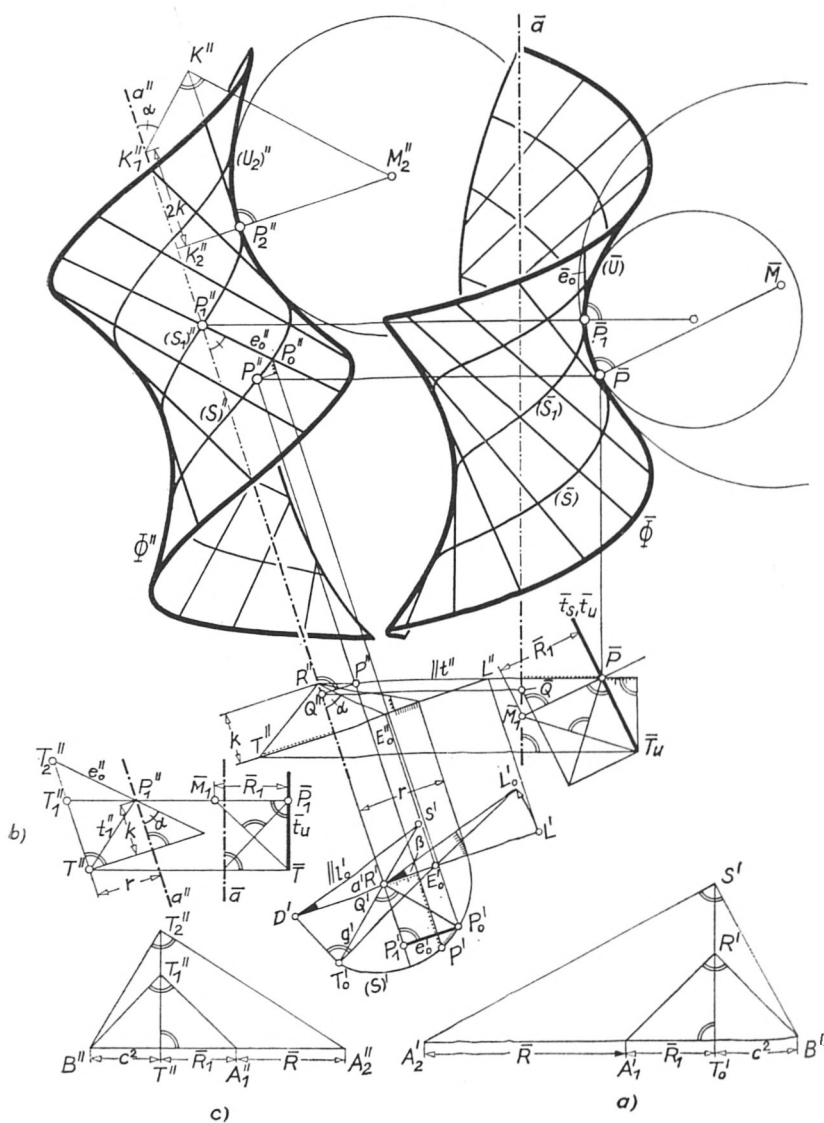


Abb. 9

baren Umrisses ($\bar{U}$) von Φ ist dabei für einen allgemeinen Punkt $\bar{P}$ von ($\bar{U}$) nach Lage und Größe (Mittelpunkt $\bar{M}$, Radius $\bar{R} = \bar{P}\bar{M}$) vollständig durchgeführt. Ebenso sind die Konstruktionen der Krümmungskreise in den Scheiteln $\bar{P}_1$ von ($\bar{U}$) und P_2'' von $(U_2)''$, wobei $(U_2)''$ der scheinbare 2. Umriß von Φ ist, vollständig angegeben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden die Konstruktionen samt Punkt P unterhalb der Risse gesondert herausgezeichnet.

Zunächst sind $\bar{P}$ und die Tangente $\bar{t}_u$ von ($\bar{U}$) in $\bar{P}$ zu bestimmen; dies kann in bekannter Weise wie folgt geschehen.

Zur Konstruktion von $\bar{P}$ gehe man von einem beliebigen Punkt P_0 der gegebenen, zu π_2 parallelen Erzeugenden e_0 aus. Die Grundrißebene π_1 sei $\perp a$. Es seien (S) die Bahnschraublinie von P_0 , R die gemeinsame Spitze der Richtkegel von Φ und (S) (Höhe k), E_0 der Fluchtpunkt von e_0 , T_0 der Fluchtpunkt der Tangente von (S) in P_0 und L der Fluchtpunkt der Projektionsrichtung l . Auf der Fluchtspur E_0T_0 der Tangentialebene τ_0 von Φ in P_0 sei L_0 ein Punkt, der durch Drehung um a in L übergeht (Drehwinkel $\beta = \sphericalangle L'_0R'L'$). Bei der durch diese Drehung und den Schraubparameter k bestimmten Schraubung $\mathfrak{S}$ gehen P_0 in einen Punkt P von (S) und τ_0 in die Tangentialebene τ von P über, deren Fluchtspur durch L' geht. Daher ist $\tau \parallel l$ und P ein Punkt des wahren Umrisses (U) von Φ . Der Punkt $\bar{P}$ ergibt sich aus P' durch Umprojektion.

Die Tangente $\bar{t}_u$ von ($\bar{U}$) in $\bar{P}$ ergibt sich z. B. als Normalriß der Tangente t_s von (S) in P . Zur Vereinfachung der Umprojektion von t_s werde der Punkt T_u auf t_s verwendet, für den PT_u gleichsinnig parallel und gleich der (zu t_s parallelen) Mantellinie RT des Richtkegels von (S) ist. Ist R auf a so gewählt, daß R'' wie in Abb. 9 auf dem Ordner $P''\bar{P}$ liegt, so liegt $\bar{T}_u$ auf dem Ordner durch T'' . Die Abstandsdifferenz der Punkte $\bar{P}$ und $\bar{T}_u$ von $\bar{a}$ ist gleich dem Abstand des Drehfluchtpunktes P' von der Ebene (P_1, a) , der dem Grundriß zu entnehmen ist. Somit liegt $\bar{T}_u$ fest, und es ist $\bar{t}_u = \bar{P}\bar{T}_u$.

Die Konstruktion des Krümmungskreises von ($\bar{U}$) in $\bar{P}$ schließt sich nun folgendermaßen an.

Auf Φ sind durch P zwei Kurven (C_1) , (C_2) zu ziehen, die in P konjugierte Tangenten t_1 , t_2 haben. Es sei $(C_1) \equiv (S)$, und (C_2)

sei der Normalschnitt von Φ in P durch die zu $t_1 \equiv t_s$ konjugierte Tangente t_2 . Zur Bestimmung von $\bar{R}$ sind die Krümmungsradien $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ der Normalrisse $(\bar{C}_1), (\bar{C}_2)$ in $\bar{P}$ zu ermitteln.

$\bar{R}_1$ ergibt sich mit Hilfe des Normalrisses $(\bar{E})$ der Ellipse (E) , nach der die Schmiegeebene von (C_1) in P den Schraubzylinder von (C_1) schneidet. Die kleine Halbachse von (E) ist der Schraubradius PQ ; die große Halbachse ist parallel t_1 und hat die Länge PT_u . Die Ellipse $(\bar{E})$ mit Mittelpunkt $\bar{Q}$ ist daher durch zwei konjugierte Halbmesser gegeben. Der eine davon ist $\bar{P}\bar{Q}$, der andere ist in Abb. 9 in parallel verschobener Lage $\bar{P}\bar{T}_u$ bereits gezeichnet. Der Krümmungsradius $\bar{P}\bar{M}_1$ von $(\bar{E})$ in $\bar{P}$ ist in Abb. 9 in bekannter Weise unter Verwendung der Scherung $\|\bar{t}_u$ konstruiert. Da (C_1) und (E) in P einen gemeinsamen Krümmungskreis besitzen, so ist wegen der Invarianz der Berührungsordnung gegen Projektion $\bar{R}_1 = \bar{P}\bar{M}_1$.

Die Konstruktion von $\bar{R}_2$ erfolgt mit Hilfe der Dupinschen Indikatrix (I) von Φ in P und wird durch folgende Vorbetrachtung sehr einfach. Projiziert man die in 2. mit PQ_i ($i = 1, 2$) bezeichneten konjugierten Halbmesser von (I) (vgl. Abb. 3 a, 3 b S. 281), deren Länge $\sqrt{|R_i^*|}$ ist, in Richtung l auf eine ebenfalls in der Tangentialebene τ liegende beliebige Gerade g , die mit l den Winkel $\varphi = \angle(l, g)$, $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ einschließt (Abb. 10), so wer-

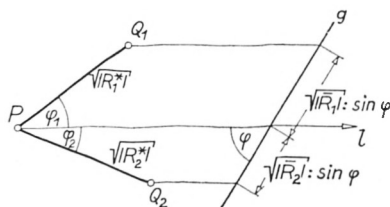


Abb. 10

den auf g mit Rücksicht auf (3) und (4) S. 280 f. zwei Strecken der Länge $\sqrt{|\bar{R}_i|} \sin \varphi$ festgelegt. Ihr Verhältnis ist gegen Affinität invariant. Sind also von PQ_i, l, g die (nicht ausgearteten) Risse $P'Q'_i, l', g'$ in einem beliebigen Maßstab gegeben, dann schneiden die Parallelen zu l' durch die Punkte P' und Q'_i

auf der Geraden g' zwei Strecken der Länge

$$(16) \quad c_i = c \cdot \sqrt{|\bar{R}_i|}, \quad c = \text{const.} \neq 0$$

aus. Sind die drei Strecken $\bar{R}_1$ und c_i bekannt, dann können zunächst die Konstante c^2 und anschließend der gesuchte Krümmungsradius $\bar{R}_2$ jeweils nach dem Höhensatz konstruiert werden.

Im vorliegenden Beispiel (Abb. 9) ist die zu t_1 konjugierte Tangente t_2 Fallinie von τ .¹⁶ Außerdem ist die Erzeugende e von Φ durch P Asymptote von (I) . Zur Vereinfachung der Konstruktion werde an Stelle von (I) die Dupinsche Indikatrix (I_0) von P_0 betrachtet. $(I_0)'$ geht aus $(I)'$ durch die Drehung $P' \rightarrow P'_0$ um R' hervor. An Stelle der Richtungen e' , t'_1 , t'_2 und l' treten die Richtungen $R'E'_0 \parallel e'_0$, $R'T'_0 \perp R'P'_0$, $T'_0D' \perp T'_0E'_0$ (Fallinie von τ_0 !) und $l'_0 = R'L'_0$, die bis auf T'_0D' gezeichnet vorliegen. Der Maßstab von (I_0) sei so gewählt, daß der zu t_1 gehörige Halbmesser im Grundriß die Länge $R'T'_0$ hat. Der zu t_2 gehörige Halbmesser hat dann im Grundriß vermöge einer elementaren Eigenschaft der Hyperbelasymptoten die Länge T'_0D' . Damit sind die konjugierten Halbmesser von $(I_0)'$ in ihrer durch T'_0 parallel verschobenen Lage $R'T'_0$ und T'_0D' bestimmt.

Als Gerade g' werde nun zweckmäßig $R'T'_0$ gewählt. Durch die Projektion von $R'T'_0$ und T'_0D' in Richtung l'_0 werden auf g' die zu $\sqrt{|\bar{R}_1|}$ und $\sqrt{|\bar{R}_2|}$ proportionalen Strecken

$$(17) \quad c_1 = R'T'_0 \quad \text{und} \quad c_2 = S'T'_0$$

festgelegt. In Abb. 9a ist aus c_1 und $\bar{R}_1$ die Konstante c^2 und aus c^2 und c_2 – jeweils nach dem Höhensatz – der Krümmungsradius $\bar{R}_2$ konstruiert. Der gesuchte Krümmungsradius $\bar{R}$ kann dabei als Differenz von $\bar{R}_2$ und $\bar{R}_1$ unmittelbar abgegriffen werden.

Geht man von den Punkten aus, die bei der Konstruktion von $\bar{P}$ und $\bar{t}_u$ bereits verzeichnet wurden, so hat man also folgende bemerkenswert einfache

¹⁶ Vgl. [9] S. 159 Satz 11.

Konstruktion von $\bar{R}$ für einen beliebigen Punkt $\bar{P}$ von $(\bar{U})$ (Abb. 9)

a) Konstruktion von $\bar{R}_1$. Der Ordner des Lotfußpunktes Q'' von (P'', a'') schneidet $\bar{a}$ in $\bar{Q}$. Das Lot von $\bar{T}_u$ auf die durch $\bar{P}$ gehende Diagonale des Rechtecks, das durch die Grundseite $\bar{P}\bar{T}_u$ und ihre durch $\bar{Q}$ gezogene Gegenseite bestimmt ist, schneidet das in $\bar{P}$ auf $\bar{P}\bar{T}_u$ errichtete Lot in $\bar{M}_1$. Es ist $\bar{R}_1 = \bar{P}\bar{M}_1$.

b) Konstruktion von $\bar{R}_2$ und $\bar{R}$. Das Lot auf $T'_0 E'_0$ in T'_0 schneidet $R' E'_0$ in D' . Die Parallele zu $R' L'_0$ durch D' schneidet $R' T'_0$ in S' . Auf dem Lot zu $T'_0 R'$ in T'_0 (Abb. 9a) ist $A'_1 T'_0 = \bar{R}_1$ abzutragen. Das Lot auf $A'_1 R'$ in R' schneidet $A'_1 T'_0$ in B' . Das Lot auf $B' S'$ in S' schneidet $A'_1 T'_0$ in A'_2 . Es ist $\bar{R}_2 = A'_2 T'_0$ und $\bar{R} = A'_1 A'_2$.

Diese Konstruktion versagt im Scheitel $\bar{P}_1$ von $(\bar{U})$, weil der Grundriß $(I)'$ von (I) zu einer Geraden ausartet. Benützt man als Ausweg den zu (I) kongruenten Aufriß $(I)''$, so wird die Konstruktion von $\bar{R}$ sogar besonders einfach (Abb. 9b).

Es sei P_1 die Spitze des Richtkegels K der Kehlschraublinie (S_1) (Höhe k , Grundkreisradius r). Die Schraubtangente t_1 von P_1 ist die Umrißmantellinie $P_1 T$ von K im Aufriß; ihr Normalriß $\bar{P}_1 \bar{T}$ ist daher die zu $\bar{a}$ parallele Seite des Halbachsenrechteckes von $(\bar{E})$, aus dem sich der Krümmungsradius $\bar{R}_1 = \bar{P}_1 \bar{M}_1$ von $(\bar{S}_1)$ in bekannter Weise ergibt. Die zu t_1 konjugierte Tangente t_2 ist parallel a . Ferner ist e_0 Asymptote von (I) . Der Maßstab von $(I)''$ sei so gewählt, daß $P''_1 T''$ Halbmesser von $(I)''$ ist. Der konjugierte Halbmesser hat dann die Länge $T'' T''_2$. Wählt man $T'' T''_2$ als Gerade g'' , dann ist $c_2 = T'' T''_2$. Durch Projektion von $T'' P''_1$ in Richtung l'' erhält man $c_1 = T'' T''_1$. Aus $\bar{R}_1$, c_1 und c_2 werden $\bar{R}_2$ und $\bar{R}$ in Abb. 9c völlig entsprechend zu Abb. 9a bestimmt.

Setzt man die bekannte Konstruktion von $\bar{R}_1$ voraus, bei der T'' und $\bar{T}$ schon benützt werden, so ergibt sich folgende

Konstruktion von $\bar{R}_2$ und $\bar{R}$ im Scheitel $\bar{P}_1$ von $(\bar{U})$

Die Parallele zu a'' durch T'' schneidet den Ordner durch P''_1 in T''_1 und e''_0 in T''_2 (Abb. 9b). Auf dem Lot zu $T'' T''_1$ in T''

(Abb. 9c) ist $T''A_1'' = \bar{R}_1$ abzutragen. Das Lot auf $A_1''T_1''$ in T_1'' schneidet $A_1''T''$ in B'' . Das Lot auf $B''T_2''$ in T_2'' schneidet $A_1''T''$ in A_2'' . Es ist $\bar{R}_2 = A_2''T''$ und $\bar{R} = A_1''A_2''$.

Eine weitere Vereinfachung der Konstruktion von $\bar{R}$ ergibt sich, wenn die Schraubachse a zur Projektionsebene parallel ist. Folgende Modifikation erfordert besonders wenig Aufwand an Zeichenarbeit.

Wird in Abb. 9b $a'' \parallel \bar{a}$ angenommen, so ergibt sich mit $\alpha = \sphericalangle(e_0, a)$

$$(18) \quad c_1 = T''T_1'' = k, \quad c_2 = T''T_2'' = k + r \operatorname{ctg} \alpha.$$

Da (S_1) in diesem Fall bekanntlich den Krümmungsradius $\bar{R}_1 = k^2 : r$ hat, ergibt sich aus $\bar{R}_1$ und c_1 nach (16)

$$(19) \quad c^2 = r,$$

und aus c^2 und c_2 folgt

$$(20) \quad \bar{R}_2 = \frac{1}{r} (k + r \operatorname{ctg} \alpha)^2.$$

Schließlich erhält man aus $\bar{R} = \bar{R}_2 - \bar{R}_1$

$$(21) \quad \bar{R} = (2k + r \operatorname{ctg} \alpha) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Da in Abb. 9 $a \parallel \pi_2$ ist, ist (21) auch der Krümmungsradius des scheinbaren zweiten Umrisses $(U_2)''$ von Φ im Scheitel P_2'' . Man hat damit folgende

Konstruktion von $\bar{R}$ im Scheitel P_2'' von $(U_2)''$
(Abb. 9)

Im Lotfußpunkt K_2'' von (P_2'', a'') ist auf a'' die Strecke $K_2''K_1'' = 2k$ anzutragen. In K_1'' ist an a'' der Winkel $\alpha = \sphericalangle(a, e_0)$ so anzutragen, daß sein freier Schenkel aus der Parallelen zu a'' durch P_2'' die Strecke $P_2''K'' = 2k + r \operatorname{ctg} \alpha$ ausschneidet. Das Lot auf $K_1''K''$ in K'' schneidet $P_2''K_2''$ im Krümmungsmittelpunkt M_2'' von $(U_2)''$ in P_2'' .

4. Beispiel

In Abb. 11 ist eine Schraubfläche Φ mit dem Meridian (M_0) , der Achse a und dem Schraubparameter k in allgemeiner Lage im Normalriß $\bar{\Phi}$ (Projektionsebene π , Projektionsrichtung $l \perp \pi$) und in spezieller Lage im Aufriß Φ'' (Aufrißebene $\pi_2 \perp \pi$; a und (M_0) in π_2) dargestellt. Die Konstruktion des Krümmungskreises (Mittelpunkt $\bar{M}$, Radius $\bar{R} = \bar{P}\bar{M}$) des scheinbaren UmrisSES ($\bar{U}$) von Φ in einem beliebigen Punkt $\bar{P}$ ist – soweit sie von der entsprechenden Konstruktion in Abb. 9 abweicht – dabei vollständig ausgeführt. Außerdem sind die Krümmungskreise von $(\bar{U})$ im Scheitel $\bar{P}_1$ und von $(U_2)''$, dem scheinbaren 2. Umriß von Φ , im Scheitel P_2'' eingezeichnet. Ihre sehr einfache Konstruktion wird unten erläutert.

Die Konstruktion des Punktes $\bar{P}$ und seiner Tangente $\bar{t}$ erfolgt wie bei der Regelschraubfläche in Abb. 9; der Punkt P_0 der Schraublinie (S) , von dem man ausgeht, ist jetzt in π_2 angenommen und liegt auf (M_0) . Es seien R die Spitze des Richtkegels von (S) , T_0 der Fluchtpunkt der Schraubtangente in P_0 , E_0 der Fluchtpunkt der Meridiantangente t_0 in P_0 , L der Fluchtpunkt von l . Es sei ferner $(C_1) \equiv (S)$, und (C_2) sei der Normalschnitt von Φ in P durch die zur Schraubtangente t_1 von P konjugierte Tangente t_2 , die wie in Abb. 9 als Fallinie der Tangentialebene in P bestimmt ist; (M) sei der Meridian von P , und t sei die Tangente von (M) in P .

P ist im vorliegenden Beispiel ein elliptischer Flächenpunkt und seine Dupinsche Indikatrix (I) eine Ellipse, von der zwei konjugierte Durchmesser nach Lage und Größe zu bestimmen und dann in Richtung l auf eine Gerade g zu projizieren sind. Ist $\bar{R}_1$ bekannt, so können daraus $\bar{R}_2$ und $\bar{R}$ wie in Beispiel 3 (Abb. 9 und 9a) ermittelt werden. Die Konstruktion von $\bar{R}_1$ ist ebenfalls schon im Beispiel 3 (Abb. 9) ausgeführt und daher in Abb. 11 weggelassen. – Die Konstruktionen von $\bar{R}$ in den Beispielen 3 und 4 unterscheiden sich also nur in der Teilkonstruktion von (I) .

Zunächst werde der Grundriß $(I)'$ von (I) so gedreht, daß sein Mittelpunkt nach R' kommt und t'_1 in $R'T'_0$ übergeht. Dabei gehen l' , t' , t'_2 in $l'_0 = R'L'_0$, $R'E'_0$ und die zur Fluchtspur $T'_0E'_0$ normale Richtung $R'D'$ über. Diese gedrehte Lage von $(I)'$

werde mit $(I_1)'$ bezeichnet. Der Maßstab von (I) sei so gewählt, daß $R'T'_0 = r$ Halbmesser von $(I_1)'$ ist.

Ein weiterer Punkt C' von $(I_1)'$ läßt sich auf dem Durchmesserstrahl $R'E'_0$ (der jedoch zu $R'T'_0$ nicht konjugiert ist) mit Hilfe des Krümmungsradius $\bar{R}_0$ von $(\bar{M})$ in $\bar{P}$ bestimmen. Dazu kann $\bar{R}_0$ folgendermaßen konstruiert werden.

Es sei (K) der Krümmungskreis von (M) in P , dessen Radius $PG = R_0$ gegeben sei (Abb. 11a). Der Normalriß $\bar{G}\bar{P}\bar{F}$ des gleichschenkelig-rechtwinkligen Zweibeins GPF , das durch den Radius $PG = R_0$ und die Tangente PF von (K) bestimmt ist, legt den Normalriß $(\bar{K})$ von (K) fest. ($\bar{G}\bar{P}\bar{F}$ kann mit Hilfe der auf α liegenden und mittels Umklappung $G''_x P''_x F''_x$ bestimmten Spurpunkte N und T konstruiert werden, Abb. 11a). $(\bar{M})$ und $(\bar{K})$ haben in $\bar{P}$ denselben Krümmungsradius $\bar{R}_0$, der sich in bekannter Weise aus dem Rechteck $\Re$ ergibt, dessen Grundseiten $\bar{P}\bar{F}$ und die Parallele zu $\bar{P}\bar{F}$ durch $\bar{G}$ sind.

Die Gerade g' , auf die $(I_1)'$ in Richtung l'_0 zu projizieren ist, sei $R'T'_0$ (Abb. 11). Dann ist

$$(22) \quad c_1 = R'T'_0 = r$$

und mit (16) S. 297

$$(23) \quad c^2 = r^2 : \bar{R}_1.$$

Ist $R'S'_0 = c_0$ auf g' die Projektion von $R'C'$ in Richtung l'_0 , so gilt entsprechend zu (16)¹⁷

$$(24) \quad c_0 = c \sqrt{|\bar{R}_0|}.$$

Damit ist $R'C'$ bestimmt, und $(I_1)'$ ist nun gegeben durch die (nicht konjugierten) Halbmesser $R'T'_0$, $R'C'$ und die zu $R'T'_0$ konjugierte Richtung $R'D'$. Der Endpunkt D' des Halbmessers $R'D'$ ergibt sich mittels Affinität zum Kreis $(S)'$, wenn $R'T'_0$ die Affinitätsachse ist. Dabei sind C' , C'_x und D' , D'_x Paare zugeordneter Punkte. Die Projektion von $R'D'$ auf die Gerade g' in

¹⁷ Wie man am Beweis von (16) leicht sieht, gilt (16) für alle Flächenkurven durch P (vgl. Fußnote 4 S. 278), also auch für (M_0) .

Richtung l'_0 sei $R'S'$. Dann ist

$$(25) \quad c_2 = R'S'.$$

Außerdem ist $S'D'_x \parallel S'_0C'_x$; daraus ergibt sich S' noch einfacher.

Mit c_2 und c^2 folgt aus (16)

$$(26) \quad \bar{R}_2 = c_2^2 : c^2,$$

und damit ist $\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2$ bestimmt;¹⁸ man hat also im elliptischen Bereich von Φ folgende

Konstruktion von $\bar{R}$ für einen beliebigen Punkt $\bar{P}$ von $(\bar{U})$
(Abb. 11)

a) Konstruktion von $\bar{R}_1$ wie S. 298.

b) Konstruktion von $\bar{R}_2$ und $\bar{R}$. Das Lot von $\bar{F}$ auf die durch $\bar{P}$ gehende Diagonale des Rechtecks $\Re$ [Grundseite $\bar{P}\bar{F}$, Höhe = Abstand $(\bar{G}, \bar{P}\bar{F})$] schneidet auf der Normale von $(\bar{U})$ in $\bar{P}$ den Krümmungsradius $\bar{R}_0$ von $(\bar{M}_0)$ aus (Abb. 11a). Nach dem Höhensatz (Abb. 11 b) ergibt sich c^2 aus $\bar{R}_1$ und r nach (23) und $c_0 = R'S'_0$ aus c^2 und $\bar{R}_0$ nach (24). Die Parallele zu $R'L'_0$ durch S'_0 (Abb. 11) schneidet P'_0R' in C' ; das Lot von C' auf $T'_0E'_0$ schneidet $R'T'_0$ in C'_0 . Die Lote auf $R'T'_0$ in C'_0 und in R' schneiden $(S)'$ in C'_x und D'_x . Die Parallele zu $S'_0C'_x$ durch D'_x schneidet $R'T'_0$ in S' . Mit $R'S' = c_2$ und c^2 folgt $\bar{R}_2$ aus (26) nach dem Höhensatz (Abb. 11 b), und es ist $\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2$.

Diese Konstruktion von $\bar{R}$ versagt in den Punkten von (U) , deren Tangentialebene $\parallel a$ ist, weil dann $(I_1)'$ zu einer Geraden ausartet. In Abb. 11 trifft dies z. B. für den Punkt P_1 zu. Doch läßt sich $\bar{R}$ in diesem Fall in anderer Weise wie folgt sehr einfach konstruieren.

In Abb. 11 ist (M_0) symmetrisch zur Normale im Punkt P_2 , der aus P_1 durch positive Viertelschraubung hervorgeht. Daher ist P_1 Scheitel von $(\bar{U})$. Diese Eigenschaft ist im folgenden jedoch nicht wesentlich.

¹⁸ Ist $R'E'_x$ (Abb. 11) ein zu $C'_xS'_0$ normaler Halbmesser von $(S)'$ und $R'S'_1 = c_3$ seine Projektion $\parallel C'_xS'_0$ auf g' , so ist, da die Projektion des zu $R'E'_x$ senkrechten Kreishalbmessers auf g' verschwindet, $\bar{R} = c_3^2 : c^2$. In Abb. 11 und 11b ist diese Konstruktion von $\bar{R}$ gestrichelt eingezeichnet.

In P_1 sind Schraubtangente und Meridiantangente konjugiert. Daher kann für (C_1) die Bahnschraublinie und für (C_2) der Meridian von P_1 gewählt werden. Der Punkt $\bar{P}_1$ ist Scheitel sowohl von $(\bar{C}_1)$ als auch von der Bildellipse $(\bar{K})$ des Krümmungskreises (K) des Meridians in P_1 . Die Konstruktion von $\bar{R}_1$ erfolgt wie im 3. Beispiel (Abb. 9b). Die Konstruktion von $\bar{R}_2$ ist mit der Konstruktion von $\bar{R}_0$ in Abb. 11a identisch, die sich noch vereinfacht, weil $G''P''F''$ auf a'' fällt und T Fernpunkt von a ist. Setzt man die Konstruktionen von $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_0$ als bekannt voraus, so hat man zur

Konstruktion von $\bar{R}$ im Scheitel $\bar{P}_1$ von $(\bar{U})$ für einen elliptischen Flächenpunkt P_1 die Summe $\bar{R} = |\bar{R}_1| + |\bar{R}_0|$ und für einen hyperbolischen Flächenpunkt P_1 die Differenz $\bar{R} = ||\bar{R}_1| - |\bar{R}_0||$ zu bilden.

Ist speziell $a \parallel \pi$, so ist der Krümmungsradius $\bar{R}_0$ im Scheitel $\bar{P}_1$ unmittelbar gegeben, weil der Meridian von P_1 im Normalriß in wahrer Gestalt erscheint; $\bar{R}_0$ ist daher gleich dem Krümmungsradius R_0 von (M_0) im Punkt P_2 . Da bekanntlich $\bar{R}_1 = k^2 : r$ ist, gilt

$$(27) \quad \bar{R} = \left| \frac{k^2}{r} \pm |R_0| \right|.$$

Da in Abb. 11 $a \parallel \pi_2$ ist, so ist (27) auch der Krümmungsradius des zweiten scheinbaren Umrisses $(U_2)''$ in P_2'' . Man hat also die besonders einfache

Konstruktion von $\bar{R}$ im Scheitel P_2'' von $(U_2)''$.

Es ist

$$\bar{R} = \left| \frac{k^2}{r} \pm |R_0| \right|,$$

wobei das positive Zeichen im Fall eines elliptischen, das negative Zeichen im Fall eines hyperbolischen Flächenpunktes P_2 gilt.

5. Beispiel

In Abb. 12 ist die Rotationsfläche Φ von Beispiel 1 S. 288 (Abb. 6) im Zentralriß $\bar{\Phi}$ (Perspektive) dargestellt (Bildebene π ,

Zentrum O , Hauptpunkt H , Distanz $d = HO$). Die Achse a von Φ liege in π ,¹⁹ so daß $\bar{a} = a$ ist. Die Aufrißebene π_2 falle mit π zusammen, so daß $O'' = H$ ist. Der in $\pi = \pi_2$ liegende Meridian (M_0) sei gegeben, vgl. Abb. 6.

Zur Konstruktion eines Punktes $\bar{P}$ von $(\bar{U})$ und seiner Tangente $\bar{t}$ (Abb. 12) geht man bekanntlich von einem beliebigen Parallelkreis (K) von Φ aus, dessen Ebene ε nicht durch O geht und auf dem ein reeller Punkt P von (U) liegt. Φ wird längs (K) von einem Drehkegel mit Achse a und Spitze S und von einer Kugel mit Mittelpunkt M_1 berührt. Es sei O_s der Schnitt von OS und ε . Der gesuchte Berührungspunkt P der Tangentialebene OSP von Φ kann als Berührungspunkt der Tangente O_sP von O_s an (K) im Grundriß bestimmt werden. In Abb. 12 geht ε' aus ε durch Vierteldrehung um die Aufrißspur ε'' hervor. O'_s liegt daher auf der Geraden durch $\bar{S}$ und durch den Fluchtpunkt O_u der zu PP' parallelen Drehsehn. Der Spurpunkt $\bar{T}$ der Tangente O_sP ergibt sich ebenfalls im Grundriß. $\bar{S}\bar{T} = \bar{t}$ ist die gesuchte Tangente von $(\bar{U})$ in $\bar{P}$, und $\bar{P}$ selbst ergibt sich als Schnitt von $\bar{t}$ und dem Aufriß $O''P''$ des Projektionsstrahls OPP .²⁰

Die zur Konstruktion von $\bar{R}$ einzuführenden Kurven (C_1) und (C_2) seien mit dem Parallelkreis (K) und dem Meridian (M) des Punktes P identisch. Die Projektionskegel K_1 und K_2 von (K) und (M) schneiden die Bildebene π nach den Zentralrissen $(\bar{K}) \equiv (\bar{C}_1)$ und $(\bar{M}) \equiv (\bar{C}_2)$. Die zu π parallele Ebene durch P wird von K_1 und K_2 nach zwei zu $(\bar{K})$, $(\bar{M})$ bezüglich O zentrisch-ähnlichen Kurven (K_0) und (M_0) geschnitten, deren Krümmungsradien R_1^0 und R_2^0 in P sich wie folgt aus R_1 und R_2 ergeben.

¹⁹ Dies ist keine wesentliche Einschränkung; liegt a nicht in π und auch nicht in der Verschwindungsebene, so kann durch zentrisch-ähnliche Deformation bezüglich O erreicht werden, daß a in π zu liegen kommt. Das Bild $\bar{\Phi}$ wird dabei nicht geändert, vgl. z. B. Müller-Kruppa [6] S. 349, F. Hohenberg [3] S. 91 (Fußnote). O. Baier bezeichnet in seinen Vorlesungen über Perspektive diese Methode – π liegt im allgemeinen zwischen O und a – als „Hilfsverkleinerung“.

²⁰ Außerdem liegt $\bar{P}$ auf dem Bild O_uP' der Drehsehne PP' , und $\bar{t}$ ist als Spur der Tangentialebene OSP zum Aufriß $P''M''_1$ der Flächennormale in P senkrecht.

Es sei φ der Winkel $\sphericalangle OP\bar{T}$, und ϑ sei der Winkel der Flächennormale von P gegen π . Die Winkel zwischen OP und den Tangenten von (K) und (M) in P seien wieder mit φ_i ($i = 1, 2$) bezeichnet. Aus den auf die Kegel K_1 und K_2 angewendeten Sätzen von Euler und Meusnier folgt

$$(28) \quad R_i^0 = R_i \frac{\sin^2 \varphi_i}{\sin^2 \varphi} \cdot \cos \vartheta, \quad i = 1, 2.$$

Da $(\bar{K})$ und (K_0) sowie $(\bar{M})$ und (M_0) im Verhältnis $OP\bar{P} : OP$ ähnlich sind, folgt

$$(29) \quad \bar{R}_i = R_i \frac{\sin^2 \varphi_i}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{OP\bar{P}}{OP} \cdot \cos \vartheta, \quad i = 1, 2.$$

(vgl. Fußnote 11 S. 286). Die durch (29) bestimmten Krümmungsradien $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$ von $(\bar{K})$ und $(\bar{M})$ sind in Abb. 12 folgendermaßen konstruiert.

Das Dreieck $\bar{S}P\bar{T}$, dessen Katheten $P\bar{T}$ und $P\bar{S}$ Tangenten von (K) und (M) in P sind, wird um die Spur $\bar{S}\bar{T}$ in die Bildebene π hereingedreht und erscheint hier in wahrer Gestalt $\bar{S}P_0\bar{T}$. Insbesondere ist

$$(30) \quad \varphi_1 = \sphericalangle PP_0\bar{T}, \quad \varphi_2 = \sphericalangle PP_0\bar{S}, \quad \varphi = \sphericalangle P_0P\bar{T}.$$

Projiziert man die von P_0 aus auf $P_0\bar{T}$ und $P_0\bar{S}$ abgetragenen gegebenen Krümmungsradien R_1 bzw. R_2 parallel P_0P auf $\bar{t}$, so sind auf $\bar{t}$ offenbar die Strecken

$$(31) \quad a_i = R_i \frac{\sin \varphi_i^1}{\sin \varphi}, \quad i = 1, 2$$

bestimmt, die nun ebenfalls von P_0 aus auf $P_0\bar{T}$ bzw. $P_0\bar{S}$ abgetragen und dann parallel P_0P auf $\bar{t}$ projiziert werden sollen. Es ergeben sich so auf $\bar{t}$ die Strecken

$$(32) \quad b_i = R_i \frac{\sin^2 \varphi_i}{\sin^2 \varphi}, \quad i = 1, 2.$$

Zur Konstruktion von ϑ werde die Seitenrißebene $\pi_3 \perp \bar{t}$ eingeführt. Dann erscheint ϑ im Seitenriß in wahrer Größe als Winkel zwischen $P'''P'''$ und dem Seitenrißordner $P''P'''$. Projiziert man

Setzt man die Konstruktionen von $\bar{P}$ und $\bar{t}$ als bekannt voraus, dann hat man folgende

Konstruktion von $\bar{R}$ für einen beliebigen Punkt $\bar{P}$ von $(\bar{U})$
(Abb. 12)

Der Kreis um $\bar{T}$ mit Radius $\bar{T}P'$ schneidet $M_1''P''$ in P_0 .²¹ Die Strecken b_i ($i = 1, 2$), die sich aus R_i dadurch ergeben, daß die auf $P_0\bar{T}$ bzw. $P_0\bar{S}$ abgetragenen Strecken R_i parallel $P_0\bar{P}$ auf $\bar{t}$ projiziert und ihre Projektionen a_i wieder auf $P_0\bar{T}$ bzw. $P_0\bar{S}$ abgetragen und parallel $P_0\bar{P}$ auf $\bar{t}$ projiziert werden, sind im Seitenriß (Seitenrißebene $\pi_3 \perp \bar{t}$) auf $P'''P'''$ von P''' aus im Falle eines elliptischen Flächenpunktes P in entgegengesetzten Richtungen, im Falle eines hyperbolischen Flächenpunktes P in gleicher Richtung abzutragen und senkrecht auf $P''P'''$ zu projizieren. Die dabei auf $P''P'''$ bestimmten Strecken d_i sind von H aus zentral auf $\bar{t}$ zu projizieren; dadurch werden auf $\bar{t}$ die gesuchten Strecken $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ und $\bar{R}$ unmittelbar ausgeschnitten.

5. Ausblick auf weitere Anwendungen

a) Nach W. Wunderlich²² sind in jedem Punkt einer Spiralfäche Φ mit lotrechter Achse die Bahntangente t_1 der mit Φ verknüpften Spirallung und die Falllinie t_2 der Tangentialebene konjugiert. Der Krümmungsradius $\bar{R}$ des scheinbaren Umrisses $(\bar{U})$ von Φ kann damit für einen beliebigen Punkt $\bar{P}$ von $(\bar{U})$ folgendermaßen bestimmt werden. Es sei (S) die Bahnspirale des Originalpunktes P von $\bar{P}$ und (K) die Kurve durch P , die aus der gegebenen Erzeugenden (K_0) von Φ durch Spirallung hervorgeht. Der Krümmungskreis von (S) in P kann aus dem Schnitt der Schmiegeebene und des Spiralzylinders von (S) bestimmt werden. Der Krümmungskreis von (K) ergibt sich durch Spirallung aus dem entsprechenden Krümmungskreis von (K_0) , der gegeben sei. Nach Meusnier sind damit die Normalschnitte von Φ durch t_1 und durch die Tangente t_3 von (K) in P bestimmt (die Konstruktion dieser Normalschnitte ist wegen Satz 1 S. 280

²¹ Der zu P_0 bezüglich $\bar{t}$ symmetrische Schnittpunkt wird nicht beachtet.

²² [12] S. 255, Satz 5.

nicht erforderlich). Die Dupinsche Indikatrix des Punktes P ist nun bestimmt durch die zu t_1 und t_3 gehörenden Durchmesser und die zu t_1 konjugierte Richtung t_2 (die i. a. von t_3 verschieden ist).

Somit kann der Krümmungsradius $\bar{R}$ des scheinbaren Umrissses ($\bar{U}$) von Φ im Punkt $\bar{P}$ mit den angegebenen Methoden konstruiert werden, wobei das 4. Beispiel (Abb. 11 S. 300) als vereinfachte Vorlage dienen kann.

Die Ermittlung von $\bar{R}$ wird erheblich einfacher, wenn (K_0) Fallinie von Φ ist. Die Fallinie (K) des Umrißpunktes P geht aus (K_0) durch Spirallung hervor. (K) und (S) haben in P konjugierte Tangenten und können daher i. a. als die in Satz 2 S. 283 genannten Kurven (C_1) und (C_2) gewählt werden. Sind $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$ die Krümmungsradien von $(\bar{K})$ und $(\bar{S})$ in $\bar{P}$, so ist $\bar{R}$ nach Satz 2 einfach die algebraische Summe von $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$.

Ist von Φ ein Meridian (M_0) gegeben, dessen Tangente t_0 in P_0 vertikal ist, so sind t_0 und t_1 konjugiert. Es sei (M) der Meridian eines aus P_0 durch Spirallung hervorgehenden Umrißpunktes P . (M) und (S) haben in P konjugierte Tangenten und können daher in P i. a. als Kurven (C_1) und (C_2) gewählt werden. Die Konstruktion von $\bar{R}$ wird daher auch in diesem Fall besonders einfach. Dies gilt insbesondere auch für die schöne Fig. 2 in [12] S. 257, bei der (M) ein Kreis ist.

b) Wie F. Hohenberg bemerkt,²³ ist die Eingriffslinie q , längs der eine Schraubfläche Φ mit der Achse a von einer Drehfläche ψ mit der Achse f berührt wird, im Fall $f \parallel a$ zugleich der wahre Umriß von Φ für die Projektionsrichtung t , wobei t Schraubtangente eines Punktes von f ist. Dies hat praktische Bedeutung beim Fräsen und Schleifen von Schraubflächen.

Der Meridian $\bar{m}$ der Drehfläche ψ kann nach verschiedenen bekannten Methoden punkt- und tangentialweise konstruiert werden.²⁴ Mit den Methoden der vorliegenden Arbeit lassen sich darüber hinaus auch noch die Krümmungsradien des Meridians $\bar{m}$ von ψ konstruieren, wie in einer folgenden Arbeit ausgeführt werden soll.

²³ [3] S. 197, Fußnote 1.

²⁴ Vgl. z. B. O. Baier [1] S. 248–250, F. Hohenberg [3] S. 196 ff., G. Jauch [4] S. 1–23, W. Wunderlich [13] S. 315–326; weitere Arbeiten siehe [4] S. 2.

Literaturverzeichnis

- [1] Baier, O., Konstruktion eines Fräasers, der eine gegebene Schraubenfläche erzeugt, Z. angew. Math. Mech. 14, S. 248–250 (1934).
- [2] Blaschke, W., Kreis und Kugel, Leipzig 1916.
- [3] Hohenberg, F., Konstruktive Geometrie in der Technik, Wien 1961.
- [4] Jauch, G., Meridiankonstruktion rotierender Werkzeuge zur Herstellung von Schraubenflächen, Österr. Ing. Arch. XIV S. 1–23 (1960).
- [5] Kruppa, E., Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, Wien 1957.
- [6] Müller-Kruppa, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Wien 1948.
- [7] Mannheim, A., Cours de géométrie descriptive, Paris 1880.
- [8] Reuschel, A., Über ein einheitliches Konstruktionsprinzip zur Ermittlung der Krümmung von Bahnkurven und Hüllbahnen, Österr. Ing. Arch. III S. 9–23 (1949).
- [9] Schaal, H., Über Regelflächen mit ähnlichen Lieschen Schmiegeflächen 2. Ordnung und die Spitzen der scheinbaren Umrisse von Regelschraubenflächen bei Parallelprojektion, Sitz.Ber. Bayer. Akad. Math.-nat. Klasse, 1959, S. 111–182.
- [10] Schaal, H., Ein Beitrag zur konstruktiven Differentialgeometrie, Monatshefte Math. 65, Heft 2 (1961).
- [11] Strubecker, K., Differentialgeometrie III, Berlin 1959.
- [12] Wunderlich, W., Darstellende Geometrie der Spiralfächen, Monatshefte Math. Phys. 46, S. 248–265 (1938).
- [13] Wunderlich, W., Geometrische Grundlagen für das Fräsen von Schraubnuten I, Österr. Ing. Arch. VI S. 315–326 (1952).

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. O. Baier, danke ich in herzlicher Verbundenheit für alle Anregungen, die ich von ihm empfangen habe.

H. Schaal.