Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1933. Heft II
Mai-Juli-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ein neuer Beweis für die formale Entwickelbarkeit algebraischer Funktionen in Potenzreihen.

Von Fritz Lettenmeyer in München.

Vorgelegt von Herrn Perron in der Sitzung am 8. Juli 1933.

§ 1. Einleitung.

Die Tatsache, daß eine algebraische Gleichung der Form

$$\text{(a)} \qquad \sum_{\sigma=0}^{n} \left(\sum_{\varrho=0}^{\infty} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho} \right) y^{\sigma} = 0$$

Lösungen der Form

$$\text{(P)} \qquad y = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (\nu_0 \text{ und } k \text{ ganz, } \nu_0 \gtreqless 0,\ k > 0)$$

besitzt, gilt bekanntlich schon im Gebiet der formalen Algebra; es wird also über die $a_{\varrho\sigma}$ lediglich vorausgesetzt, daß sie Größen irgendeines Körpers $\mathfrak{A}$ bedeuten, in welchem die üblichen Rechengesetze gelten (d. h. eines Körpers von der Charakteristik Null). Demgemäß ist der Begriff Lösung in dem formalen Sinn zu verstehen, daß nach Einsetzung von (P) in die linke Seite von (a) sich durch Umrechnung eine Potenzreihe in $x^{\frac{1}{k}}$ ergeben soll, deren sämtliche Koeffizienten gleich Null sind; dies sei kurz durch den Ausdruck „formale Lösung" gekennzeichnet.

Für diese Tatsache, welche in der Überschrift kurz als die formale Entwickelbarkeit algebraischer Funktionen in Potenzreihen bezeichnet ist, gibt es verschiedene Beweise, welche Herr Ostrowski in einer kürzlich erschienenen Arbeit[1] besprochen und um einen weiteren, besonders eleganten Beweis vermehrt hat. Es erübrigt sich daher, hier nochmals auf die vorhandenen Beweise einzugehen; auch für die Literaturangaben sei auf die genannte Arbeit verwiesen.

[1] Mathematische Zeitschrift Bd. 37, S. 98—133.

Zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten c_ν bedient man sich bekanntlich der Methode der sog. Puiseuxschen Diagramme; diese Methode wurde durch eingehende Analysierung von Hensel und Landsberg[2] soweit zu einem Existenzbeweis ausgebaut, daß zunächst die Existenz einer einzigen Lösung (P) gewährleistet ist; die übrigen Lösungen werden dann durch Produktzerlegung erhalten.

Dieser Beweis war bis jetzt der einzige, der wenigstens zum Teil denjenigen Rechenoperationen nachgebildet ist, welche bei der praktischen Berechnung der c_ν in der Tat geleistet werden müssen.

Der im folgenden mitgeteilte Beweis führt diesen Gesichtspunkt konsequent durch; er ist eine vollständige Diskussion des Verfahrens, das bei der praktischen Berechnung der c_ν am nächsten liegt: mit einem Ansatz (P) in die Gleichung (a) hineinzugehen und aus den entstehenden Bedingungsgleichungen die c_ν sukzessive zu berechnen zu versuchen.[3] Er liefert also gegenüber den reinen Existenzbeweisen insofern mehr, als in ihm sämtliche Möglichkeiten verfolgt werden, welche bei der Aufeinanderfolge der einzelnen Rechenoperationen eintreten können, und dadurch sämtliche Lösungen schrittweise konstruiert werden. Man vergleiche in dieser Beziehung etwa, daß der Satz II gegenüber der allgemeinen Existenzaussage des Satzes I eine Angabe darüber enthält, zu welchen Lösungen das Verfahren nach Auswahl eines bestimmten Anfangsschrittes noch führt.

Dabei muß folgende Einschränkung erwähnt werden: die Fragestellung wird in dieser Arbeit auf Lösungen

$$(\mathrm{P}_0) \qquad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (k > 0 \text{ und ganz})$$

---

[2] Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen usw., Leipzig 1902, S. 39—67.

[3] Die bekannte Tatsache, daß der allgemeinere Ansatz einer Potenzreihe mit aufsteigend geordneten und ins Unendliche wachsenden reellen Exponenten notwendig auf einen Ansatz der Form (P) führt, läßt sich leicht mit den im folgenden verwendeten Methoden zeigen. Davon sei hier der Kürze halber abgesehen.

beschränkt. Die Übertragung der Ergebnisse auf Lösungen der Form (P) bietet dann keine Schwierigkeiten mehr; man braucht nur die Gleichung (a) mittels $y = x^{\frac{r_0}{k}} z$ auf die neue Variable z zu transformieren. Diese und damit zusammenhängende Dinge sind in der auf die vorliegende unmittelbar folgenden Arbeit von einem allgemeineren Gesichtspunkt aus behandelt.

Bleiben wir also bei der Frage nach allen Lösungen der Form (P_0). Mit der erwähnten Methode der Aufstellung der Bedingungsgleichungen für die unbestimmten Koeffizienten c_ν stößt man beim Auftreten mehrfacher Wurzeln auf Schwierigkeiten, da das System der Bedingungsgleichungen sehr kompliziert wird. Das ist wohl der Grund, daß dieser Weg noch nie zu einem vollständigen Existenzbeweis ausgebaut wurde. Diese Schwierigkeiten werden hier durch einen Induktionsbeweis überwunden; es sei aber bemerkt, daß die Fassung als Induktionsbeweis nicht die Tatsache beeinträchtigt, daß der Beweis ein praktisch brauchbares Verfahren zur sukzessiven Berechnung der c_ν mit Gewinnung aller Lösungen (P_0) liefert.

Daß der Induktionsbeweis kompliziert ist, liegt in der Natur der Sache. Er läßt sich nicht vereinfachen, da jeder seiner Schritte bei der praktischen Berechnung der c_ν wirklich auftritt; dies merkt man allerdings erst, wenn man einen Fall durchrechnet, wo es sich um mehr als fünffache Vielfachheiten handelt. Man wird z. B. erst bei solchen Vielfachheiten die Notwendigkeit ersehen, daß die Induktionsschritte nach Fareybrüchen eingeteilt werden müssen.

Noch in einem zweiten Punkt unterscheidet sich der vorliegende Beweis von allen übrigen. Er gilt nämlich ohne weiteres auch für gewisse Gleichungen unendlich hohen Grades in y. Dies rührt von folgendem Umstand her: Für den Beweis wird die Gleichung (a) in der nach Potenzen von x geordneten Form

$$\text{(b)} \qquad \sum_{\varrho=0}^{\infty} \left(\sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^\sigma \right) x^\varrho = 0$$

benützt werden, wo also alle $n_\varrho \leqq n$ sind. Nun wird aber im ganzen Beweis an keiner Stelle von der Beschränktheit der n_ϱ Gebrauch gemacht. Der Existenzbeweis gilt also bereits für

Gleichungen der Form (b) mit nicht beschränkten n_ϱ, die Gleichungen unendlich hohen Grades in y sind.

Sachlich mag dies vielleicht nicht weiter als Vorzug gewertet werden, da sich ja die Behandlung von Gleichungen unendlich hohen Grades in y mit dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz auf Gleichungen endlichen Grades in y zurückführen läßt; methodisch dürfte es aber doch von Interesse sein; denn aus der Tatsache, daß bei Zugrundelegung einer Gleichung (b) mit nicht beschränkten n_ϱ an unserem Beweis durch vorhergehende Reduktion auf eine Gleichung endlichen Grades in y kein Wort gespart würde, geht hervor, daß bei dem vorliegenden verallgemeinerten Existenzproblem der Weierstraßsche Vorbereitungssatz kein unentbehrliches Hilfsmittel ist.

In einer vorhergehenden Arbeit (S. 103—127 dieses Jahrganges) habe ich unter Voraussetzung der Lösungsexistenz die Tatsache behandelt, daß die c_ν einer Lösung (P) einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper über $\mathfrak{A}$ angehören, und den Grad dieses Erweiterungskörpers näher untersucht. Daß bei dem jetzigen Existenzbeweis die Sätze I und II der früheren Arbeit nochmals mitgeliefert werden, ist nicht verwunderlich; es würde aber für den Existenzbeweis keine Vereinfachung bedeuten, die früheren Resultate als bekannt vorauszusetzen. Der Beweis in § 2 der früheren Arbeit ist wesentlich einfacher, läßt sich aber nicht zu einem Existenzbeweis ausbauen.

Wir werden also für den folgenden Beweis eine Gleichung der Form

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \Phi_\varrho(y) = 0, \quad \Phi_\varrho(y) = \sum_{\sigma=0}^{n_\varrho} a_{\varrho\sigma} y^\sigma \quad [4]$$

zugrundelegen, wo die n_ϱ nicht beschränkt zu sein brauchen. Es darf natürlich $\Phi_0(y)$ als nicht identisch Null angenommen werden. Dann soll $\Phi_0(y)$ als das **Anfangspolynom** bezeichnet werden.

[4] Es wird nicht $a_{\varrho n_\varrho} \neq 0$ vorausgesetzt; n_ϱ braucht also nicht der Grad des Polynoms $\Phi_0(y)$ zu sein.

Eine Lösung heißt von der Vielfachheit q, wenn sie Lösung aller Gleichungen

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^{\varrho} \Phi_{\varrho}^{(\lambda)}(y) = 0 \quad [5]$$

mit $\lambda = 0, \ldots, q-1$, aber nicht Lösung der Gleichung mit $\lambda = q$ ist.

§ 2. Der Existenzsatz.

Satz I (Existenzsatz): Es sei $F(x,y) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} x^{\varrho} \Phi_{\varrho}(y)$; die $\Phi_{\varrho}(y)$ seien Polynome in y mit Koeffizienten aus einem Körper $\mathfrak{A}$; $\Phi_0(y)$ sei nicht identisch Null, hat also einen Grad $m \geqq 0$. Dann hat die Gleichung

$$F(x,y) = 0 \tag{I}$$

genau m formale Lösungen der Form

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (k > 0 \text{ und ganz}). \tag{P_0}$$

Dabei sind mehrfache Lösungen in ihrer Vielfachheit zu zählen.

Für jede einzelne dieser Lösungen gilt, daß ihre sämtlichen c_{ν} einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper über $\mathfrak{A}$ angehören („Koeffizientenkörper").

Geht man mit dem Ansatz (P_0) in (I) hinein, so ergibt sich für $x = 0$ (d. h. durch Sammlung der von x freien Glieder) $\Phi_0(c_0) = 0$. Die Größe c_0 muß also eine Wurzel des Anfangspolynoms $\Phi_0(y)$ sein; dies gilt unabhängig von der Wahl der Zahl k.

Im Fall $m = 0$ gibt es also keine Lösung der Form (P_0). Von jetzt ab sei daher $m \geqq 1$. Dann gilt

---

[5] Die oberen Akzente bzw. Indizes bezeichnen stets formale Differentiationen.

Satz II: Gegeben sei der in Satz I vorausgesetzte Sachverhalt. c_0 sei eine festgewählte q-fache Wurzel von $\Phi_0(y)$. Dann gibt es genau q mit diesem c_0 beginnende Lösungen (mehrfache mehrfach gezählt) der Form (P_0).

Für jede einzelne gilt, daß ihre sämtlichen c_ν einem endlichen algebraischen Erweiterungskörper über $\mathfrak{A}$ angehören.

Aus Satz II, angewandt auf die sämtlichen verschiedenen Wurzeln von $\Phi_0(y)$, folgt sofort Satz I. Es genügt also, den Satz II zu beweisen.

Zusatz zu Satz II: w bezeichne den Grad der algebraischen Größe c_0 über $\mathfrak{A}$. Dann ist für jede der in Satz II genannten Lösungen der Grad des Koeffizientenkörpers (über $\mathfrak{A}$) $\leqq wq$, a fortiori $\leqq m$.[6]

Beweis des Satzes II samt Zusatz für $q = 1$.

Im Fall $q = 1$ gehen wir zunächst mit dem Ansatz

$$(P_1) \qquad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$$

in (I) hinein, wo also $k = 1$ gewählt ist. Ordnet man auf der linken Seite nach Potenzen von x, so ist zunächst wegen $\Phi_0(c_0) = 0$ der Koeffizient von x^0 gleich Null. Der Koeffizient einer Potenz x^λ $(\lambda \geqq 1)$ wird offenbar bereits dann erhalten, wenn in dem Ausdruck

$$\sum_{\varrho=0}^{\lambda} x^\varrho \Phi_\varrho \left(\sum_{\nu=0}^{\lambda-\varrho} c_\nu x^\nu \right)$$

die Glieder mit x^λ gesammelt werden; es können also keine anderen c_ν als $c_0, c_1, \ldots, c_\lambda$ vorkommen. Suchen wir speziell die Glieder, welche c_λ enthalten, so muß $\varrho = 0$ sein; es genügt also, sie aus dem Ausdruck

[6] Über $wq \leqq m$ vgl. S. 108—109.

$$\Phi_0\left(\sum_{\nu=0}^{\lambda} c_\nu x^\nu\right) = \Phi_0 + \Phi_0' \sum_{\nu=1}^{\lambda} c_\nu x^\nu + \frac{1}{2}\Phi_0''\left(\sum_{\nu=1}^{\lambda} c_\nu x^\nu\right)^2 + \ldots{}^{7}$$

zu sammeln, was ersichtlich $\Phi_0' c_\lambda$ liefert. Die unendlich vielen Bedingungsgleichungen dafür, daß (p_1) eine Lösung sei, sind also von der Form:

$$\Phi_0' c_\lambda + \left\{\begin{matrix}\text{Polynom in } c_0, c_1, \ldots, c_{\lambda-1} \\ \text{mit Koeffizienten aus } \mathfrak{A}\end{matrix}\right\} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dieses Gleichungssystem liefert im Fall $q = 1$, d. h. $\Phi_0' \neq 0$, sukzessive $c_1, c_2, c_3, \ldots$ eindeutig als Größen des Körpers $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{A}, c_0)$ vom Grad w.

Die so erhaltene Lösung (p_1) hat die Vielfachheit Eins, da $\sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \Phi_\varrho'(y)$ wegen $\Phi_0' \neq 0$ durch (p_1) sicher nicht zu Null gemacht wird.

Es ist noch zu zeigen, daß im Fall $q = 1$ keine anderen (mit demselben c_0 beginnenden) Lösungen mit $k > 1$ vorhanden sind. Angenommen

$$(p_2) \qquad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu x^{\frac{\nu}{k}} \qquad (d_0 = c_0)$$

sei eine Lösung. Dann bedeutet dies, $x = t^k$ gesetzt, daß für die Gleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} t^{k\varrho} \Phi_\varrho(y) = 0$$

sowohl $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{k\nu}$ als auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu t^\nu$ Lösungen sind.

Diese beiden Lösungen müssen jedoch wegen $d_0 = c_0$ identisch sein, wie die soeben für Lösungen der Form (p_1) bewiesene Eindeutigkeit, angewandt auf den neuen Sachverhalt in t, y, lehrt. Es ist also

$$d_\nu = 0 \text{ für } \nu \not\equiv 0 \pmod{k}$$
$$d_{k\nu} = c_\nu.$$

---

[7] **Verabredung** (auch für § 3 und § 4): $\Phi_\varrho^{(\tau)}$ ohne Argumentangabe bedeute stets $\Phi_\varrho^{(\tau)}(c_0)$.

Die Potenzreihe (p_2) ist also nichts anderes als die Potenzreihe (p_1); wir betrachten natürlich zwei Potenzreihen nicht als verschieden, wenn die eine aus der anderen durch Erweiterung der als Exponenten stehenden Brüche und Hinzufügung von Gliedern mit Koeffizienten Null hervorgeht.

Damit sind im Fall $q = 1$ die Behauptungen bewiesen; außerdem ist $k = 1$ festgestellt.

§ 3. Der Induktionsbeweis.

Es sei von jetzt ab $q \geqq 2$. Wir führen nun einen Induktionsbeweis, indem wir für alle Vielfachheiten $< q$ (anstelle des jetzt vorgegebenen q) die Behauptungen des Satzes II samt Zusatz als bewiesen annehmen. Diese Induktion soll als die „äußere" Induktion bezeichnet werden, da in ihren Beweis selbst nochmals ein Induktionsverfahren eingeschoben wird, welches dann als die „innere" Induktion bezeichnet werden soll.

Der bequemeren Rechnung halber werden für den folgenden Beweis die gesuchten Potenzreihen (P_0) in der Form

$$(P_0^*) \qquad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{Qk}}$$

angesetzt, wo Q das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $2, 3, \ldots, q$ bedeute.

Wird noch

$$x^{\frac{1}{Q}} = t$$

gesetzt, so ist also die Aufgabe:

alle Potenzreihen der Form (P_0^*) zu finden, welche die Gleichung (I) erfüllen,

äquivalent mit der Aufgabe:

alle Potenzreihen der Form

$$(P_1) \qquad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{\frac{\nu}{k}}$$

zu finden, welche die Gleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} t^{Q\varrho}\Phi_{\varrho}(y) = 0 \tag{1}$$

erfüllen.[8]

Daß bei dieser Transformation der Aufgabe die Vielfachheit einer Lösung erhalten bleibt, ist klar.

Transformationsschema: Angenommen $c_1, \ldots, c_{\varkappa-1}$ seien alle $= 0$. (Für $\varkappa = 1$ fällt dies weg.) Die Gleichung (1), mittels

$$y = c_0 + t^{\frac{\varkappa}{k}} z$$

transformiert, liefert die Gleichung

$$G(t, z) = 0, \tag{2}$$

wobei

$$G(t, z) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} t^{Q\varrho} \sum_{\tau=0}^{\infty} \Phi_{\varrho}^{(\tau)} t^{\frac{\varkappa\tau}{k}} \frac{z^{\tau}}{\tau!};$$ hierin $Qk\varrho + \varkappa\tau = \alpha$ gesetzt:

$$= \sum_{\alpha=0}^{\infty} t^{\frac{\alpha}{k}} \sum_{\substack{\varrho \geq 0,\ \tau \geq 0 \\ Qk\varrho + \varkappa\tau = \alpha}} \Phi_{\varrho}^{(\tau)} \frac{z^{\tau}}{\tau!}.$$

Es ist also die Aufgabe:

alle Potenzreihen der Form (P_1), in welchen die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_{\varkappa-1}$ alle $= 0$ sind (für $\varkappa = 1$ fällt dies weg), zu finden, welche die Gleichung (1) erfüllen,

mittels $y = c_0 + t^{\frac{\varkappa}{k}} z$ äquivalent mit der Aufgabe:

alle Potenzreihen der Form

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\varkappa+\nu} t^{\frac{\nu}{k}} \tag{P_2}$$

zu finden, welche die Gleichung (2) erfüllen.

Behauptung: Bei jeder derartigen Transformation bleibt die Vielfachheit einer Lösung erhalten.

[8] „Äquivalent" soll hier und bei den folgenden Transformationen besagen: Jede Lösung der ersten Aufgabe entspricht umkehrbar eindeutig einer Lösung der zweiten Aufgabe.

Beweis: $\lambda \geqq 0$ sei irgendeine ganze Zahl. Einerseits ist

$$\frac{\partial^\lambda F(t^Q, y)}{\partial y^\lambda} = \sum_{\varrho=0}^{\infty} t^{Q\varrho} \Phi_\varrho^{(\lambda)}(y) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} t^{\frac{\alpha}{k}} \sum_{\substack{\varrho \geq 0,\ \tau \geq 0 \\ Qk\varrho + \varkappa\tau = \alpha}} \Phi_\varrho^{(\lambda+\tau)} \frac{z^\tau}{\tau!},$$

was sich durch dieselbe Umrechnung wie oben für $\lambda = 0$ ergibt.

Andrerseits ist

$$\frac{\partial^\lambda G(t,z)}{\partial z^\lambda} = \sum_{\alpha=\varkappa\lambda}^{\infty} t^{\frac{\alpha}{k}} \sum_{\substack{\varrho \geq 0,\ \tau \geq \lambda \\ Qk\varrho + \varkappa\tau = \alpha}} \Phi_\varrho^{(\tau)} \frac{z^{\tau-\lambda}}{(\tau-\lambda)!}$$

(denn in der inneren Summe fallen die Glieder mit $\tau < \lambda$ beim λ-maligen Differenzieren weg; infolgedessen beginnt die äußere Summe frühestens mit $\alpha = \varkappa\lambda$). Nun $\alpha - \varkappa\lambda = \alpha'$ und $\tau - \lambda = \tau'$ gesetzt:

$$= t^{\frac{\varkappa\lambda}{k}} \sum_{\alpha'=0}^{\infty} t^{\frac{\alpha'}{k}} \sum_{\substack{\varrho \geq 0,\ \tau' \geq 0 \\ Qk\varrho + \varkappa\tau' = \alpha'}} \Phi_\varrho^{(\lambda+\tau')} \frac{z^{\tau'}}{\tau'!}.$$

Durch Vergleich folgt:

$$\frac{\partial^\lambda G(t,z)}{\partial z^\lambda} = t^{\frac{\varkappa\lambda}{k}} \frac{\partial^\lambda F(t^Q, y)}{\partial y^\lambda}.$$

Je nachdem also (P_1) die Gleichung $\frac{\partial^\lambda F}{\partial y^\lambda} = 0$ erfüllt oder nicht, wird auch (P_2) die Gleichung $\frac{\partial^\lambda G}{\partial z^\lambda} = 0$ erfüllen oder nicht erfüllen. Dies bedeutet aber die Erhaltung der Vielfachheit. An dieser Tatsache ändert sich natürlich nichts, wenn in der Gleichung (2) eine Potenz von t wegdividiert wird.

Schritt A_0) Es sei nun $1 \leqq \varkappa < \frac{Qk}{q}$. (Im Fall $q = 2$, $k = 1$ fällt dieser Schritt weg.)

Nach Voraussetzung ist $\Phi_0 = 0$, $\Phi_0' = 0$, ..., $\Phi_0^{(q-1)} = 0$, $\Phi_0^{(q)} \neq 0$ (vgl. Fußnote 7 S. 323). Es tritt also in $G(t, z)$ zuerst für $\varrho = 0$, $\tau = q$, d. h. für $\alpha = \varkappa q$, eine von Null verschiedene innere Summe auf, nämlich zunächst das Glied $\Phi_0^{(q)} \frac{z^q}{q!}$. Ein

weiteres Glied hat diese innere Summe aber nicht; denn aus $Qk\varrho + \varkappa\tau = \varkappa q$ folgt wegen $\varkappa q < Qk$, daß $\varrho = 0$ sein muß.

$G(t, z)$ beginnt also mit $t^{\frac{\varkappa q}{k}} \Phi_0^{(q)} \frac{z^q}{q!}$; wird noch in (2) $t^{\frac{\varkappa q}{k}}$ wegdividiert, so lautet das zu (2) gehörige Anfangspolynom, von welchem das $c_\varkappa$ der Potenzreihe (P_2) eine Wurzel sein muß: $\Phi_0^{(q)} \frac{z^q}{q!}$. Hieraus folgt: $c_\varkappa = 0$.

Für $\varkappa = 1$ war für die Transformation von (1) in (2) nichts vorausgesetzt. Es folgt also, daß in jeder Lösung (P_1) $c_1 = 0$ sein muß. Jetzt ist dieselbe Transformation mit $\varkappa = 2$ möglich und es folgt, daß (falls noch $2 < \frac{Qk}{q}$ ist) auch $c_2 = 0$ sein muß. So läßt sich weiter schließen und wir erhalten das Ergebnis:

In jeder Lösung (P_1) der Gleichung (1) sind notwendig alle c_ν mit $1 \leqq \nu < \frac{Qk}{q}$ gleich Null.

Schritt B_0) Nun sei $\varkappa = \frac{Qk}{q}$.

Wie beim Schritt A_0) erkennt man, daß auch jetzt (2) mit $\alpha = \varkappa q = Qk$ beginnt; zu diesem α gehören aber jetzt zwei Wertepaare (ϱ, τ), nämlich außer $(0, q)$ auch noch $(1, 0)$, was sofort aus $Qk\varrho + \frac{Qk}{q}\tau = Qk$ oder $q\varrho + \tau = q$ folgt.

Die Bedingungsgleichung $Qk\varrho + \varkappa\tau = \alpha$ in $G(t, z)$ wird jetzt

$$\frac{Qk}{q}(q\varrho + \tau) = \alpha, \qquad \text{wo } \alpha \geqq Qk \text{ ist;}$$

α ist also von der Form $\alpha = \frac{Qk}{q}\beta$, wo $\beta \geqq q$ ist. (2) läßt sich daher in der Form schreiben:

$$\sum_{\beta=q}^{\infty} t^{\frac{Q}{q}\beta} \sum_{\substack{\varrho \geq 0,\ \tau \geq 0 \\ q\varrho + \tau = \beta}} \Phi_\varrho^{(\tau)} \frac{z^\tau}{\tau!} = 0;$$

oder, wenn noch t^Q wegdividiert und $\beta - q = \gamma$ gesetzt wird:

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} t^{\frac{Q}{q}\gamma} \Psi_{0,\gamma}(z) = 0, \tag{3}$$

wobei

$$\Psi_{0,\gamma}(z) = \sum_{\substack{\varrho \geqq 0,\ \tau \geqq 0 \\ q\varrho + \tau = q + \gamma}} \Phi_{\varrho}^{(\tau)} \frac{z^{\tau}}{\tau!}$$

und insbesondere

$$\Psi_{0,0}(z) = \Phi_0^{(q)} \frac{z^q}{q!} + \Phi_1 \qquad \text{ist.}$$

Es ist also die Aufgabe:

alle Potenzreihen der Form (P_1) zu finden, welche die Gleichung (1) erfüllen, mittels $y = c_0 + t^q z$ äquivalent mit der Aufgabe:

alle Potenzreihen der Form

$$(P_3) \qquad z = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{Qk}^{\left(\frac{\nu}{q}\right)} t^{\frac{\nu}{k}}$$

zu finden, welche die Gleichung (3) erfüllen.

Schritt C_0) Es sei zunächst $\Phi_1 \neq 0$. Dann hat das zu (3) gehörige Anfangspolynom $\Psi_{0,0}(z)$ genau q verschiedene einfache Wurzeln, die allein als Werte für $c_{Qk}^{\left(\frac{\nu}{q}\right)}$ in Betracht kommen. Mit jeder von ihnen läßt sich nun auf die Gleichung (3) der in diesem Fall schon bewiesene Satz II anwenden; es gibt also für die Gleichung (3) genau q verschiedene, einfach zählende Lösungen der Form (P_3).

Für die Gleichung (3) ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$ der zugrundeliegende Körper, mit welchem (anstelle von $\mathfrak{A}$) soeben der Satz II angewandt wurde. Jede Wurzel $c_{Qk}^{\left(\frac{\nu}{q}\right)}$ ist bezüglich $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$ von einem Grad $\leqq q$; ferner gehören für jede einzelne der q erhaltenen Potenzreihen alle c_ν bereits dem betreffenden Körper $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0, c_{Qk}^{\left(\frac{\nu}{q}\right)})$ an (vgl. den Beweis für $q = 1$ in § 2); dieser Körper ist über $\mathfrak{A}$ vom Grad $\leqq wq$.

Wegen der Äquivalenz der am Schluß des Schrittes B_0) genannten Aufgaben sind damit in dem vorliegenden Fall die Behauptungen des Satzes II samt Zusatz bewiesen.

Schritt D_0) Nun sei $\Phi_1 = 0$. Dann lautet das zu (3) gehörige Anfangspolynom wieder: $\Phi_0^{(q)} \frac{z^q}{q!}$. Hieraus folgt: $c_{Qk} = 0$.

Das Verfahren läßt sich zunächst in analoger Weise fortsetzen; es treten jedoch dann immer mehr Zerspaltungen in Unterfälle auf. Es ist nötig, hier nochmals ein Induktionsverfahren einzuschieben, also eine Induktion bei festem q; dieses Induktionsverfahren ist die oben angekündigte „innere" Induktion.

Es sei $\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{q}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots$ die zu q gehörige Farey-Reihe echter Brüche bis $\frac{1}{1}$ einschließlich; d. h. die Folge der aufsteigend geordneten reduzierten Brüche zwischen 0 (ausschließlich) und 1 (einschließlich), deren Nenner positiv und $\leqq q$ sind. Dies sind natürlich endlich viele Brüche; ihre Anzahl werde mit ω bezeichnet; die Folge endigt also mit

$$\frac{a_{\omega-1}}{b_{\omega-1}} = \frac{q-1}{q}, \qquad \frac{a_\omega}{b_\omega} = \frac{1}{1}.$$ [9]

Induktionsannahme:

1) Für alle λ mit $1 \leqq \lambda \leqq \mu$ seien folgende Größen alle gleich Null: $\Phi_{a_\lambda}^{(q-b_\lambda)}$, $\Phi_{2a_\lambda}^{(q-2b_\lambda)}$, $\Phi_{3a_\lambda}^{(q-3b_\lambda)}, \ldots$ (soweit anzuschreiben, als die oberen Indizes $\geqq 0$ sind).

2) Es sei erkannt, daß in (P_1) alle c_ν mit $1 \leqq \nu \leqq \frac{a_\mu}{b_\mu} Qk$ gleich Null sein müssen. ($\frac{Q}{b_\mu}$ ist wegen $b_\mu \leqq q$ eine ganze Zahl.)

Für $\mu = 1$ besteht die Annahme 1) wegen $a_1 = 1$, $b_1 = q$ aus der einzigen Bedingung: $\Phi_1 = 0$. In den Schritten A_0) und D_0)

---

[9] Beispiel: $q=7$ gibt: $\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$.
Es ist also z. B. $a_5=2$, $b_5=7$.

Die Abhängigkeit von q ist in den Bezeichnungen a_μ, b_μ, ω nicht ausgedrückt; doch ist keine Verwechslung zu befürchten, da q im ganzen Beweis fest ist.

Von den aus der Zahlentheorie bekannten Eigenschaften der Farey-Reihen wird hier nichts benützt.

wurde bereits erkannt, daß dann in (P_1) alle c_ν mit $1 \leqq \nu \leqq \frac{Qk}{q}$ gleich Null sein müssen.

Für $\mu = 1$ ist also der Inhalt der Induktionsannahme bereits gesichert.

Schritt A_μ) Es sei nun $\frac{a_\mu}{b_\mu} Qk < \varkappa < \frac{a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}} Qk$.

Wir behaupten, daß jetzt $G(t, z)$ wieder mit $\alpha = \varkappa q$ beginnt und daß die innere Summe für $\alpha = \varkappa q$ wieder nur aus dem durch $\rho = 0$, $\tau = q$ gelieferten Glied $\Phi_0^{(q)} \frac{z^q}{q!}$ besteht. Es ist also zu zeigen, daß alle $\Phi_\varrho^{(\tau)}$ mit

$$\rho \geqq 0,\ \tau \geqq 0,\ Qk\rho + \varkappa\tau \leqq \varkappa q$$

außer $\Phi_0^{(q)}$ gleich Null sind. Für $\rho = 0$ folgt $\tau \leqq q$; dies gibt nur für $\tau = q$ ein von Null verschiedenes Glied, und zwar das eben genannte. Es bleibt also zu zeigen, daß alle $\Phi_\varrho^{(\tau)}$ mit

$$\rho \geqq 1,\ \tau \geqq 0,\ Qk\rho + \varkappa\tau \leqq \varkappa q$$

gleich Null sind.

Aus $Qk\rho \leqq \varkappa(q - \tau)$ folgt wegen $\rho \geqq 1$, daß $q - \tau > 0$ ist; mithin:

$$\frac{\rho}{q - \tau} \leqq \frac{\varkappa}{Qk} < \frac{a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}}.$$

Es ist also $\frac{\rho}{q-\tau}$ gleich einem Bruch unserer Farey-Reihe:

$$\frac{\rho}{q-\tau} = \frac{a_{\lambda_0}}{b_{\lambda_0}} \text{ mit } \lambda_0 \leqq \mu \text{ wegen } \frac{a_{\lambda_0}}{b_{\lambda_0}} < \frac{a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}}.$$

$\frac{\rho}{q-\tau}$ braucht aber nicht reduziert zu sein; es sei

$$\rho = p\, a_{\lambda_0}, \quad q - \tau = p\, b_{\lambda_0},$$

wo $p \geqq 1$ einen ganzzahligen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Mithin: $\Phi_\varrho^{(\tau)} = \Phi_{pa_{\lambda_0}}^{(q - pb_{\lambda_0})} = 0$ nach Induktionsannahme (wegen $\lambda_0 \leqq \mu$).

Nun folgt genau wie in dem Schritt A_0), daß $c_\varkappa$ gleich Null sein muß, falls alle c_ν mit $1 \leqq \nu < \varkappa$ gleich Null sind. Auf Grund

der Induktionsannahme ist diese Schlußweise zunächst für $\varkappa = \frac{a_\mu}{b_\mu} Qk + 1$ durchführbar; es folgt dann ebenso sukzessive das Ergebnis:

In jeder Lösung (P_1) der Gleichung (1) sind notwendig alle c_ν mit $1 \leqq \nu < \frac{a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}} Qk$ gleich Null.

Schritt B_μ) Nun sei $\varkappa = \frac{a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}} Qk$; dies zur Abkürzung $= \varkappa_0$ gesetzt.

Wir behaupten, daß auch jetzt $G(t, z)$ mit $\alpha = \varkappa_0 q$ beginnt. Es ist also zu zeigen, daß alle $\Phi_\varrho^{(\tau)}$ mit

$$\rho \geqq 0, \quad \tau \geqq 0, \quad Qk\rho + \varkappa_0 \tau < \varkappa_0 q$$

gleich Null sind. Für $\rho = 0$ folgt $\tau < q$; diese $\Phi_0^{(\tau)}$ sind gleich 0. Es bleibt also zu zeigen, daß alle $\Phi_\varrho^{(\tau)}$ mit

$$\rho \geqq 1, \quad \tau \geqq 0, \quad Qk\rho + \varkappa_0 \tau < \varkappa_0 q$$

gleich 0 sind.

Aus $Qk\rho < \varkappa_0 (q - \tau)$ folgt, daß $q - \tau > 0$ ist; mithin

$$\frac{\rho}{q - \tau} < \frac{\varkappa_0}{Qk} = \frac{a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}}.$$

Da hierin einmal das $<$-Zeichen vorkommt, geht der Beweis wörtlich wie im Schritt A_μ) zu Ende.

Nun sollen die für $\alpha = \varkappa_0 q$ in der inneren Summe von $G(t, z)$ auftretenden $\Phi_\varrho^{(\tau)}$ bestimmt werden. Es sind dies die $\Phi_\varrho^{(\tau)}$ mit

$$\rho \geqq 0, \quad \tau \geqq 0, \quad Qk\rho + \varkappa_0 \tau = \varkappa_0 q;$$

also einmal $\Phi_0^{(q)}$ und ferner die $\Phi_\varrho^{(\tau)}$ mit

$$\rho \geqq 1, \quad \tau \geqq 0, \quad Qk\rho + \varkappa_0 \tau = \varkappa_0 q.$$

Aus $Qk\rho = \varkappa_0 (q - \tau)$ folgt wegen $\rho \geqq 1$, daß $q - \tau > 0$ ist; mithin

$$\frac{\rho}{q - \tau} = \frac{\varkappa_0}{Qk} = \frac{a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}}.$$

Also

$$\varrho = p a_{\mu+1}, \quad q - \tau = p b_{\mu+1} \qquad (p \geqq 1).$$

Die fraglichen $\Phi_{\varrho}^{(\tau)}$ einschließlich $\Phi_0^{(q)}$ haben also die Form $\Phi_{p a_{\mu+1}}^{(q-p b_{\mu+1})}$ mit $p \geqq 0$. Umgekehrt kommen alle derartigen $\Phi_{\varrho}^{(\tau)}$ ($p = 0, 1, 2, \ldots$; soweit anzuschreiben, als die oberen Indizes $\geqq 0$ sind) in der genannten inneren Summe von $G(t, z)$ wirklich vor; denn es ist für dieselben

$$Q k \varrho + \varkappa_0 \tau = Q k p a_{\mu+1} + \varkappa_0 (q - p b_{\mu+1}) = \varkappa_0 q.$$

Die innere Summe für $\alpha = \varkappa_0 q$ lautet also:

$$\sum_{p=0}^{\left[\frac{q}{b_{\mu+1}}\right]} \Phi_{p a_{\mu+1}}^{(q-p b_{\mu+1})} \frac{z^{q-p b_{\mu+1}}}{(q-p b_{\mu+1})!},$$

wo $\left[\frac{q}{p b_{\mu+1}}\right]$ die größte ganze Zahl $\leqq \frac{q}{b_{\mu+1}}$ bedeutet.

Die Bedingungsgleichung $Q k \varrho + \varkappa \tau = \alpha$ in $G(t, z)$ wird im jetzigen Schritt

$$\frac{Qk}{b_{\mu+1}} (b_{\mu+1} \varrho + a_{\mu+1} \tau) = \alpha, \quad \text{wo } \alpha \geqq \varkappa_0 q = \frac{a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}} Q k q \text{ ist.}$$

α ist also von der Form $\alpha = \frac{Qk}{b_{\mu+1}} \beta$, wo $\beta \geqq a_{\mu+1} q$ ist. Die Gleichung (2) läßt sich daher in der Form schreiben:

$$\sum_{\beta=a_{\mu+1} q}^{\infty} t^{\frac{Q}{b_{\mu+1}}\beta} \sum_{\substack{\varrho \geqq 0,\ \tau \geqq 0 \\ b_{\mu+1}\varrho + a_{\mu+1}\tau = \beta}} \Phi_{\varrho}^{(\tau)} \frac{z^{\tau}}{\tau!} = 0;$$

oder, wenn noch $t^{\frac{Q}{b_{\mu+1}} a_{\mu+1} q}$ wegdividiert und $\beta - a_{\mu+1} q = \gamma$ gesetzt wird:

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} t^{\frac{Q}{b_{\mu+1}}\gamma} \Psi_{\mu,\gamma}(z) = 0, \tag{4}$$

wobei

$$\Psi_{\mu,\gamma}(z) = \sum_{\substack{\varrho \geqq 0,\ \tau > 0 \\ b_{\mu+1}\varrho + a_{\mu+1}\tau = a_{\mu+1} q + \gamma}} \Phi_{\varrho}^{(\tau)} \frac{z^{\tau}}{\tau!}$$

und insbesondere

$$\Psi_{\mu,0}(z) = \Phi_0^{(q)}\frac{z^q}{q!} + \Phi_{a_{\mu+1}}^{(q-b_{\mu+1})}\frac{z^{q-b_{\mu+1}}}{(q-b_{\mu+1})!} + \Phi_{2a_{\mu+1}}^{(q-2b_{\mu+1})}\frac{z^{q-2b_{\mu+1}}}{(q-2b_{\mu+1})!} + \cdots$$

(soweit anzuschreiben, als die oberen Indizes $\geqq 0$ sind).

Es ist also die Aufgabe:

alle Potenzreihen der Form (P_1) zu finden, welche die Gleichung (1) erfüllen,

mittels $y = c_0 + t^{\frac{\kappa_0}{k}} z = c_0 + t^{\frac{a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}Q}} z$ äquivalent mit der Aufgabe:

alle Potenzreihen der Form

$$(P_4) \qquad z = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\kappa_0+\nu}\, t^{\frac{\nu}{k}}$$

zu finden, welche die Gleichung (4) erfüllen.

Schritt C_μ) Es sei zunächst das zu (4) gehörige Anfangspolynom $\Psi_{\mu,0}(z)$ nicht von der Form $\Phi_0^{(q)}\frac{z^q}{q!}$; d. h. von den in ihm vorkommenden Koeffizienten $\Phi_{pa_{\mu+1}}^{(q-pb_{\mu+1})}$ mit $p \geqq 1$ sei mindestens einer von Null verschieden.

Wir nehmen nun an, daß noch $\mu \leqq \omega - 2$ sei; der Fall $\mu = \omega - 1$ wird später besonders erwähnt werden.

Dann ist $\mu + 1 \leqq \omega - 1$; also $b_{\mu+1} > 1$ (es ist ja von den sämtlichen Nennern der Farey-Reihe nur der letzte $= 1$). Hieraus folgt aber, daß das Polynom $\Psi_{\mu,0}(z)$ keine q-fache Wurzel hat; denn der Fall der q-fachen Wurzel 0 ist nach der Annahme des Schrittes C_μ) gerade ausgeschlossen, und eine q-fache Wurzel $z_0 \neq 0$ ist offenbar unmöglich, da sonst das Polynom von der Form $\Phi_0^{(q)}(z - z_0)^q$ sein müßte, also, nach Potenzen von z entwickelt, keine Lücken haben könnte, was doch wegen $b_{\mu+1} > 1$ der Fall ist.

Bei der Annahme des Schrittes C_μ) mit $\mu \leqq \omega - 2$ hat also das zu (4) gehörige Anfangspolynom, dessen Wurzeln allein als Werte für c_{κ_0} in Betracht kommen, lauter Wurzeln mit einer Vielfachheit $< q$. Mit jeder von ihnen läßt sich also auf (4) nach Annahme

der äußeren Induktion der Satz II samt Zusatz und damit insgesamt der Satz I anwenden; wir erhalten die Aussage:

Es gibt genau q Potenzreihen der Form (P_4) (mehrfache mehrfach gezählt), welche die Gleichung (4) erfüllen.

Für die Gleichung (4) ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$ der zugrundeliegende Körper, mit welchem (anstelle von $\mathfrak{A}$) soeben der Satz II (bzw. I) angewandt wurde. Für jede einzelne der so erhaltenen Potenzreihen (P_4) ist der Koeffizientenkörper ein endlicher algebraischer Körper über $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$, dessen Grad nach dem Zusatz zu Satz II $\leqq q$ ist (q ist jetzt das dortige m). Bezüglich $\mathfrak{A}$ ist also jeder dieser Koeffizientenkörper vom Grad $\leqq w q$.

Wegen der Äquivalenz der am Schluß des Schrittes B_μ) genannten Aufgaben sind damit in dem vorliegenden Fall die Behauptungen des Satzes II samt Zusatz bewiesen.

Schritt D_μ) Nun seien in dem zu (4) gehörigen Anfangspolynom $\Psi_{\mu,0}(z)$ alle $\Phi_{\rho a_{\mu+1}}^{(q-\rho b_{\mu+1})}$ mit $\rho \geqq 1$ gleich Null; das Polynom lautet also wieder: $\Phi_0^{(q)} \frac{z^q}{q!}$. Hieraus folgt: $c_{\varkappa_0} = 0$. Damit sind aber unter Hinzunahme des Ergebnisses des Schrittes A_μ) gerade die Induktionsannahmen 1) und 2) der inneren Induktion für $\mu + 1$ anstelle von μ erfüllt.

Die hiemit abgeschlossene innere Induktion liefert also folgende Weiterführung des mit den Schritten A_0) und B_0) direkt begonnenen Verfahrens:

Im Fall C_0) sind die Behauptungen bewiesen.
Im Fall D_0) schließen sich A_1) und B_1) an.
Im Fall C_1) sind die Behauptungen bewiesen.
Im Fall D_1) schließen sich A_2) und B_2) an.
Usw.

Wenn bei der Weiterführung kein Fall auftritt, welcher mit dem Beweis der Behauptung endigt, so gelangt man schließlich zu dem Schritt $A_{\omega-1}$), welcher das Ergebnis liefert, daß alle c_ν mit $1 \leqq \nu < Qk$ notwendig gleich Null sind. In dem nun folgenden Schritt $B_{\omega-1}$) ist $\varkappa_0 = Qk$; die in den ersten Zeilen von B_μ) gemachte Feststellung lautet daher jetzt:

Alle $\Phi_\tau^{(\tau)}$ mit $\rho \geqq 0$, $\tau \geqq 0$, $\rho + \tau < q$ sind $= 0$.

Das dortige $\Psi_{\mu,\gamma}(z)$ ist jetzt:

$$\Psi_{\omega-1,\gamma}(z)=\sum_{\substack{\varrho\geq 0,\ \tau\geq 0\\ \varrho+\tau=q+\gamma}}\Phi_{\varrho}^{(\tau)}\frac{z^{\tau}}{\tau!}=\sum_{\tau=0}^{q+\gamma}\Phi_{q+\gamma-\tau}^{(\tau)}\frac{z^{\tau}}{\tau!}.$$

Hiedurch ist der Index ρ weggefallen; wir ersetzen nun γ durch den Buchstaben ρ und t^{Q} wieder durch x. Ferner werde anstelle von $\Psi_{\omega-1,\varrho}(z)$ die neue Bezeichnung $\Phi_{\varrho}(z)$ eingeführt. Dann lautet das Ergebnis des Schrittes $B_{\omega-1}$):

Die Aufgabe:

alle Potenzreihen der Form (P_0^*) zu finden, welche die Gleichung (I) erfüllen,

ist mittels $y=c_0+xz$ äquivalent mit der Aufgabe:

alle Potenzreihen der Form

$$(P_5)\qquad z=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{Qk+\nu}x^{\frac{\nu}{Qk}}$$

zu finden, welche die Gleichung

$$(5)\qquad \overline{F}(x,z)=0$$

erfüllen, wobei

$$\overline{F}(x,z)=\sum_{\varrho=0}^{\infty}x^{\varrho}\,\overline{\Phi}_{\varrho}(z),\qquad \overline{\Phi}_{\varrho}(z)=\sum_{\tau=0}^{q+\varrho}\Phi_{q+\varrho-\tau}^{(\tau)}\frac{z^{\tau}}{\tau!}$$

und insbesondere

$$\overline{\Phi}_0(z)=\Phi_0^{(q)}\frac{z^q}{q!}+\Phi_1^{(q-1)}\frac{z^{q-1}}{(q-1)!}+\cdots+\Phi_q.$$

Die $\overline{\Phi}_{\varrho}(z)$ sind also Polynome in z mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}(\mathfrak{P},c_0)$; $\overline{\Phi}_0(z)$ ist nicht identisch Null und vom Grad q (wegen $\Phi_0^{(q)}\neq 0$).

Betrachten wir zunächst den Fall, daß das Anfangspolynom $\overline{\Phi}_0(z)$ keine q-fache Wurzel hat. Seine Wurzeln, die allein als Werte für c_{Qk} in Betracht kommen, sind also alle von einer Vielfachheit $<q$.

Nun gehen die Überlegungen wörtlich wie im Schritt C_{μ}) (4. Absatz) weiter, und es folgen in dem vorliegenden Fall die Behauptungen des Satzes II samt Zusatz.

Es bleibt also der Fall übrig, daß das Polynom q-ten Grades $\Phi_0(z)$ eine q-fache Wurzel hat, die dann allein als Wert für c_{Qk} in Betracht kommt. Bekanntlich gehört dann diese Wurzel dem Körper der Koeffizienten des Polynoms, also dem Körper $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$ an.

Gegenüber den vorhergehenden Umformungen der Aufgabe liegt aber jetzt eine besonders einfache Situation vor: Die neue Aufgabe, alle Potenzreihen der Form (P_5) zu finden, welche die Gleichung (5) erfüllen, ist in ihrer Formulierung völlig analog zu der alten Aufgabe, alle Potenzreihen der Form (P_0^*) zu finden, welche die Gleichung (I) erfüllen; es treten lediglich anstelle der $\Phi_\varrho(y)$ die Polynome $\Phi_\varrho(z)$, anstelle von $\mathfrak{A}$ der Körper $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$, anstelle der c_ν die $c_{Qk+\nu}$. Eine Besonderheit der neuen Aufgabe ist, daß das Polynom $\Phi_0(z)$ vom Grad q ist, während bei der alten Aufgabe $\Phi_0(y)$ von irgendeinem Grad $m \geqq q$ sein konnte, und daß $\Phi_0(z)$ eine q-fache Wurzel hat, so daß c_{Qk} eindeutig bestimmt ist und schon dem der neuen Aufgabe zugrundeliegenden Körper $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$ angehört; d. h. die Zahl w der alten Aufgabe ist in der neuen Aufgabe $= 1$.

Wir formulieren das bisher Erreichte nochmals folgendermaßen:

Entweder gibt es genau q mit dem vorgegebenen c_0 beginnende Potenzreihen der Form (P_0^*), welche die Gleichung (I) erfüllen, und es ist für jede einzelne von ihnen der Koeffizientenkörper ein endlicher algebraischer Körper über $\mathfrak{A}$ vom Grad $\leqq wq$.

Oder es sind in (P_0^*) notwendig alle c_ν mit $1 \leqq \nu < Qk$ gleich Null, und die alte Aufgabe ist äquivalent mit der soeben angegebenen neuen Aufgabe, wo $\Phi_0(z)$ eine q-fache Wurzel hat.

Wenden wir dieses Ergebnis auf die neue Aufgabe selbst an, so folgt:

Entweder gibt es genau q Potenzreihen der Form (P_5), welche die Gleichung (5) erfüllen (andere als mit dem bestimmten c_{Qk} beginnende kann es nicht geben), und es ist für jede einzelne von ihnen der Koeffizientenkörper ein endlicher algebraischer Körper über $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$ vom Grad $\leqq 1 \cdot q$.

Wegen der Äquivalenz der Aufgaben folgt dann, daß es genau q mit dem vorgegebenen c_0 beginnende Potenzreihen der Form

(P_0^*) gibt, welche die Gleichung (I) erfüllen, und daß für jede einzelne von ihnen der Koeffizientenkörper ein endlicher algebraischer Körper über $\mathfrak{A}$ vom Grad $\leqq wq$ ist.

Oder es sind in (P_5) notwendig alle c_ν mit $Qk < \nu < 2Qk$ gleich Null, und die neue Aufgabe ist mittels $z = c_{Qk} + x^k u$ äquivalent mit folgender „zweiten neuen Aufgabe":

alle Potenzreihen der Form

$$(P_6) \qquad u = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2Qk+\nu} x^{\frac{\nu}{k}}$$

zu finden, welche die Gleichung

$$(6) \qquad \overline{\overline{F}}(x, u) = 0$$

erfüllen, wobei

$$\overline{\overline{F}}(x, u) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \overline{\overline{\Phi}}_\varrho(u), \quad \overline{\overline{\Phi}}_\varrho(u) = \sum_{\tau=0}^{q+\varrho} \overline{\Phi}_{q+\varrho-\tau}^{(\tau)} \frac{u^\tau}{\tau!}.$$ [10]

Die $\overline{\overline{\Phi}}_\varrho(u)$ sind Polynome in u mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0, c_{Qk}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{A}, c_0)$; $\overline{\overline{\Phi}}_0(u)$ ist nicht identisch Null und vom Grad q und hat eine q-fache Wurzel.

Diese zweite neue Aufgabe ist von genau derselben Struktur wie die erste neue Aufgabe; es gibt also entweder genau q Potenzreihen der Form (P_6), welche die Gleichung (6) erfüllen usw., woraus in diesem Fall die Richtigkeit der Behauptungen des Satzes II samt Zusatz folgt; oder es sind in (P_6) notwendig alle c_ν mit $2Qk < \nu < 3Qk$ gleich Null, und man gelangt zu einer äquivalenten, analog gebauten dritten neuen Aufgabe.

Es ist nun ganz klar, daß sich dieses Verfahren in völlig analoger Weise fortsetzen läßt, und hier gewiß entbehrlich, dies durch einen Induktionsbeweis ausführlich darzutun.

Nun bestehen zwei Möglichkeiten: Einmal, daß bei einer der neuen Aufgaben der Fall des „Entweder" eintritt; dann folgt, wie in der ersten neuen Aufgabe ausführlich dargestellt, die

[10] **Verabredung:** $\Phi_\varrho^{(\tau)}$ ohne Argumentangabe bedeute $\Phi_\varrho^{(\tau)}(c_{Qk})$; speziell ist $\Phi_0^{(q)} = \Phi_0^{(q)} \neq 0$.

Richtigkeit der Behauptungen des Satzes II samt Zusatz. Sodann aber, daß stets der Fall des „Oder" eintritt, sodaß das Verfahren nie abbricht.

In diesem Fall werden sukzessive die Koeffizienten c_{Qk}, c_{2Qk}, c_{3Qk}, ... eindeutig als q-fache Wurzeln der Polynome $\Phi_0(z)$, $\Phi_0(u)$, $\Phi_0(v)$, ... geliefert, mithin als Größen des Körpers $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}, c_0)$, während alle übrigen c_ν ($\nu \geqq 1$) notwendig gleich Null sind.

Es gibt also eine einzige die Gleichung (I) erfüllende, mit dem vorgegebenen c_0 beginnende Potenzreihe der Form (P_0^*):

$$(P_7) \qquad y = c_0 + c_{Qk}x + c_{2Qk}x^2 + c_{3Qk}x^3 + \cdots,$$

deren Koeffizientenkörper der Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}, c_0)$ vom Grad w über $\mathfrak{A}$ ist. Der Beweis des Satzes II samt Zusatz wird also endgültig fertig sein, wenn noch gezeigt wird, daß die Potenzreihe (P_7) eine genau q-fach zählende ist.

Zunächst ergibt sich, wenn man in

$$\frac{\partial^q F(x, y)}{\partial y^q} = \sum_{\varrho=0}^{\infty} x^\varrho \Phi_\varrho^{(q)}(y)$$

(P_7) einsetzt, für $x = 0$ das Glied $\Phi_0^{(q)}(c_0)$, welches $\neq 0$ ist. Die Potenzreihe (P_7) ist also eine höchstens q-fache Lösung.

Es bleibt also zu zeigen, daß die Potenzreihe (P_7) die $q-1$ Gleichungen

$$\frac{\partial^\lambda F(x, y)}{\partial y^\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, \ldots, q-1)$$

erfüllt.

Es war der Ausdruck $\overline{F}(x, z)$ die linke Seite der Gleichung (4) für $\mu = \omega - 1$, also $\varkappa_0 = Qk$; diese linke Seite der Gleichung (4) war aus der linken Seite der vor (4) stehenden Gleichung durch Wegdividieren des Faktors $t^{b_{\mu+1}^{Q} a_{\mu+1}^{q}}$ entstanden, der für $\mu = \omega - 1$ gleich x^q ist. Die linke Seite der vor (4) stehenden Gleichung ist aber gerade der Ausdruck, der früher (S. 325) mit $G(t, z)$ bezeichnet wurde. Es ist also

$$x^q \overline{F}(x, z) = G(t, z) \quad (\text{mit } \varkappa = Qk).$$

Also ist nach S. 326:

$$x^q \frac{\partial^\lambda F}{\partial z^\lambda} = \frac{\partial^\lambda G}{\partial z^\lambda} = t^{\frac{Qh\lambda}{k}} \frac{\partial^\lambda F}{\partial y^\lambda}$$

oder:

$$\frac{\partial^\lambda F}{\partial y^\lambda} = x^{q-\lambda} \frac{\partial^\lambda F}{\partial z^\lambda}.$$

(Dies läßt sich auch leicht ohne Benützung der früheren Formeln direkt ausrechnen, wobei zu beachten ist, daß alle $\Phi_\varrho^{(\tau)}$ mit $\varrho + \tau < q$ gleich Null sind, wie S. 334 bemerkt war.)

Genau ebenso gilt:

$$\frac{\partial^\lambda F}{\partial z^\lambda} = x^{q-\lambda} \frac{\partial^\lambda F}{\partial u^\lambda} \quad \text{usw.}$$

Die Variabeln hängen dabei mittels $y = c_0 + xz$, $z = c_{Qh} + xu$, usw. zusammen.

Setzt man nun in diese Identitäten für y die Potenzreihe (P_7), für z, u, ... die entsprechenden Potenzreihen ein, so erhält man für $\frac{\partial^\lambda F}{\partial y^\lambda}$ (wobei (P_7) für y eingesetzt ist) bei Verwendung hinreichend vieler Identitäten einen Ausdruck, der eine beliebig hohe Potenz von $x^{q-\lambda}$, wo $q-\lambda > 0$ ist, als Faktor hat. Daher muß $\frac{\partial^\lambda F}{\partial y^\lambda}$ für die Potenzreihe (P_7) identisch verschwinden.

Anhang.

§ 4. Über den Exponentenhauptnenner.

Liegt eine Potenzreihe

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_\nu x^{\frac{\nu}{k}} \quad (\nu_0 \text{ und } k \text{ ganz}, \ \nu_0 \gtrless 0, \ k > 0)$$

vor, so kann es sein, daß es eine ganze Zahl $f > 1$ derart gibt, daß alle c_ν mit $\nu \not\equiv 0 \pmod f$ gleich Null sind und zugleich f ein Teiler von k ist. Dann läßt sich die Potenzreihe in der Form

$$\sum_{\mu=\mu_0}^{\infty} c_{\mu f}\, x^{\frac{\mu f}{k}}$$

oder, $\frac{k}{f} = k'$ gesetzt, in der Form

$$\sum_{\mu=\mu_0}^{\infty} d_{\mu}\, x^{\frac{\mu}{k'}} \quad (0 < k' < k)$$

schreiben. Wenn es keine solche Zahl f gibt, soll k der „Exponentenhauptnenner" heißen; die Potenzreihe ist also dann mit dem kleinstmöglichen Exponentennenner geschrieben.

Satz III: Für jede der in Satz II genannten Potenzreihen ist der Exponentenhauptnenner $\leqq q$.

Beweis:

Für $q = 1$ wurde die Behauptung bereits in § 2 bewiesen. Es sei also $q \geqq 2$. Wir gehen zum Beweis des Satzes II zurück; es sind an den Stellen, wo sich daselbst die Existenz von Potenzreihen ergab, ergänzende Untersuchungen über deren Exponentenhauptnenner einzuschieben. Zur Annahme der äußeren Induktion ist jetzt hinzuzufügen, daß für alle Vielfachheiten $< q$ (anstelle des jetzt vorgegebenen q) die Behauptung des Satzes III bewiesen sein soll.

Zunächst gab es im Fall des Schrittes C_0) q Potenzreihen der Form (P_3), welche die Gleichung (3) erfüllten und je mit einer einfachen Wurzel c_{Qk} des zugehörigen Anfangspolynoms begannen. Sie enthalten also nach § 2 nur ganze Potenzen der unabhängigen Variabeln. Nun kann aber in (3) die Potenz $t^{\frac{Q}{q}}$ selbst als unabhängige Variable genommen werden; die Potenzreihen (P_3) sind also von der Form

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} \left(t^{\frac{Q}{q}}\right)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu}\, x^{\frac{\nu}{q}}.$$

Mittels $y = c_0 + t^{\frac{Q}{q}} z = c_0 + x^{\frac{1}{q}} z$ folgt, daß auch die q entsprechenden, die Gleichung (I) erfüllenden Potenzreihen nach ganzen

Potenzen von $x^{\frac{1}{q}}$ fortschreiten; für jede ist also der Exponentenhauptnenner entweder q selbst oder ein Teiler von q. Im Fall C_0) ist damit die Behauptung des Satzes III als richtig erkannt.

Nun betrachten wir irgendeine der Potenzreihen (P_4), welche sich im Fall des Schrittes C_μ), wo $1 \leqq \mu \leqq \omega - 2$, also $b_{\mu+1} > 1$ war, als Lösungen der Gleichung (4) ergeben haben.

Diese Potenzreihe beginnt mit einer Wurzel $c_{\varkappa_0}$ des zu (4) gehörigen Anfangspolynoms; die Vielfachheit dieser Wurzel $c_{\varkappa_0}$ sei mit s bezeichnet; es ist $s < q$, wie früher in C_μ) festgestellt wurde.

Wegen $s < q$ darf nach Annahme der äußeren Induktion der zu beweisende Satz auf die Gleichung (4) mit der vorgelegten Potenzreihe als Lösung angewandt werden; dabei werde

$$t^{\frac{Q}{b_{\mu+1}}} = x^{\frac{1}{b_{\mu+1}}}$$

als unabhängige Variable betrachtet. Dies liefert die Aussage, daß die Potenzreihe notwendig die Form hat:

$$(P_8) \qquad z = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \left(x^{\frac{1}{b_{\mu+1}}} \right)^{\frac{\nu}{s_1}}, \quad 1 \leqq s_1 \leqq s < q, \quad d_0 = c_{\varkappa_0}.$$

Hierin kann der Exponentenhauptnenner $> q$ sein.[11]

---

[11] Beispiel: $y^5 + xy^3 - x^3 = 0$. Hierin ist $\Phi_0(y) = y^5$, $\Phi_1(y) = y^3$, $\Phi_3(y) = -1$; alle übrigen $\Phi_\varrho(y)$ sind identisch Null. Es ist $c_0 = 0$ mit $q = 5$. Man verifiziert leicht, daß hier der Fall $\mu = 4$ vorliegt. Es ist hier $\frac{a_5}{b_5} = \frac{1}{2}$; y ist also von der Form $\sqrt{x}\, z$. Mittels $y = \sqrt{x}\, z$ ergibt sich, daß die Gleichung (4) lautet: $z^5 + z^3 - \sqrt{x} = 0$. Das zugehörige Anfangspolynom ist $z^5 + z^3$. Wählen wir die Wurzel $c_{\varkappa_0} = 0$, wo also $s = 3$ ist, so ergibt sich, wenn $\sqrt{x}$ als unabhängige Variable betrachtet wird, der Ansatz:

$$z = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \sqrt{x}^{\frac{\nu}{s_1}}, \quad 1 \leqq s_1 \leqq 3.$$

Geht man nun mit $z = x^{\frac{1}{2s_1}} u$ in die vorhergehende Gleichung hinein, so erhält man für $s_1 = 1$ und 2 nach Wegdividieren der überschüssigen Potenzen von x die Gleichungen in u:

$$x^{\frac{2}{3}} u^5 + x^{\frac{1}{1}} u^3 - 1 = 0$$

und

$$x^{\frac{1}{2}} u^5 + x^{\frac{1}{2}} u^3 - 1 = 0,$$

Mittels

$$y = c_0 + t^{\frac{a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}} Q} \qquad z = c_0 + x^{\frac{a_{\mu+1}}{b_{\mu+1}}} z$$

ergibt sich für die entsprechende, die Gleichung (I) erfüllende Potenzreihe die Form

$$(P_9) \qquad y = c_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu x^{\frac{a_{\mu+1}\, s_1 + \nu}{b_{\mu+1}\, s_1}}, \qquad d_0 = c_{\nu_0},$$

und hiervon ist zu beweisen, daß der Exponentenhauptnenner $\leqq q$ ist.

Es sei zunächst $c_{\nu_0} \neq 0$. Dann folgt aus der Tatsache, daß in dem zu (4) gehörigen Anfangspolynom $\Psi_{\mu, 0}(z)$ (S. 333) nur Glieder mit den Exponenten

$$q,\ q - b_{\mu+1},\ q - 2b_{\mu+1},\ q - 3b_{\mu+1},\ \ldots$$

---

welche durch keine Potenzreihe mit nichtnegativen Exponenten erfüllt werden. Es muß also $s_1 = 3$ sein; hiefür erhält man die Gleichung:

$$x^{\frac{1}{3}} u^5 + u^3 - 1 = 0.$$

Das zugehörige Anfangspolynom ist $u^3 - 1$; es gibt also ($x^{\frac{1}{3}}$ als unabhängige Variable betrachtet) drei Lösungen der Form

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu x^{\frac{\nu-1}{6}} \quad \text{mit } d_1 \neq 0.$$

Die entsprechenden Potenzreihen $z = x^{\frac{1}{6}} u$ beginnen also mit $d_1 x^{\frac{1}{6}}$, haben also den Exponentenhauptnenner 6.

Nun schreiten aber, da $u^3 - 1$ einfache Wurzeln hat, die Potenzreihen u nach ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{3}}$ fort; es enthalten daher die Potenzreihen u nur gerade, also die Potenzreihen z nur ungerade Exponenten von $x^{\frac{1}{6}}$:

$$z = \sum_{\mu=0}^{\infty} e_\mu x^{\frac{2\mu+1}{6}},$$

was zur Folge hat, daß die drei entsprechenden Potenzreihen für y:

$$y = \sqrt{x}\, z = \sum_{\mu=0}^{\infty} e_\mu x^{\frac{\mu+2}{3}}$$

in der Tat einen Exponentenhauptnenner < 5, nämlich 3, haben.

auftreten, mittels eines einfachen algebraischen Hilfssatzes[12], daß für die Vielfachheit s von c_{κ_0} die Abschätzung

$$s \leqq \frac{q}{b_{\mu+1}} < q$$

---

[12] **Hilfssatz aus der Algebra:** Es sei c eine von Null verschiedene Wurzel eines (nicht identisch verschwindenden) Polynoms der Form

$$A_0 x^q + A_1 x^{q-b} + A_2 x^{q-2b} + \cdots + A_n x^{q-nb}$$

(q und b positive ganze Zahlen; $b \leqq q$; n sei die größte ganze Zahl $\leqq \frac{q}{b}$).

Dann ist die Wurzel c von einer Vielfachheit $\leqq \frac{q}{b}$.

Beweis:

Es sei $q = nb + r$ gesetzt, wo also $0 \leqq r < b$ ist. Wegen $c \neq 0$ ist c auch Wurzel des Polynoms

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu x^{q-\nu b-r} = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu x^{b(n-\nu)},$$

und zwar von derselben Vielfachheit wie bezüglich des gegebenen Polynoms.

Wird $x^b = y$ gesetzt, so ist c^b eine Wurzel des Polynoms

$$g(y) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu y^{n-\nu}.$$

Die Vielfachheit s von c^b als Wurzel von $g(y)$ ist natürlich $\leqq n = \frac{q-r}{b}$. Die Behauptung wird also bewiesen sein, wenn noch gezeigt wird, daß c als Wurzel von $f(x)$ dieselbe Vielfachheit s hat wie c^b als Wurzel von $g(y)$.

Nun folgt aus $f(x) = g(y)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(y)\, b\, x^{b-1} \\ f''(x) &= g''(y)\,(b\, x^{b-1})^2 + g'(y)\, b\,(b-1)\, x^{b-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \end{aligned}$$

allgemein gilt, wie sich durch Induktion sofort zeigen läßt:

$$f^{(\kappa)}(x) = g^{(\kappa)}(y)\,(b\, x^{b-1})^\kappa + g^{(\kappa-1)}(y)\, P_{\kappa 1}(x) + \cdots + g'(y)\, P_{\kappa,\kappa-1}(x),$$

wo die $P_{\kappa\lambda}(x)$ Polynome in x sind. Setzt man hierin $x = c$, also $y = c^b$, so ist nach Definition der Zahl s

$$g'(c^b) = 0, \ldots, \quad g^{(s-1)}(c^b) = 0, \quad g^{(s)}(c^b) \neq 0;$$

hieraus folgt sofort:

$$f'(c) = 0, \ldots, \quad f^{(s-1)}(c) = 0, \quad f^{(s)}(c) \neq 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

gilt. Daher ist erst recht $s_1 b_{\mu+1} \leqq q$, womit für die Potenzreihe (P_9) die Behauptung bewiesen ist.

Diese Folgerung gilt auch noch für $c_{\nu_0} = 0$, falls $s \leqq \frac{q}{b_{\mu+1}}$ ist. Es kann aber im Fall $c_{\nu_0} = 0$ auch $s > \frac{q}{b_{\mu+1}}$ sein (vgl. das in der Fußnote 11 angeführte Beispiel). Wir werden jedoch nach einer Transformation eine analoge Schlußweise wie soeben anwenden können.

Es sei also jetzt $c_{\nu_0} = 0$. Diese Annahme bedeutet, daß in dem Polynom $\Psi_{\mu,0}(z)$ ein bestimmter Koeffizient $\Phi_{p_0 a_{\mu+1}}^{(q-p_0 b_{\mu+1})}$ mit $p_0 > 0$ als von Null verschieden vorausgesetzt wird, während alle Koeffizienten $\Phi_{p a_{\mu+1}}^{(q-p b_{\mu+1})}$ mit $p > p_0$ gleich Null sein sollen. Die Bedingung $p_0 > 0$ rührt von der Voraussetzung des Schrittes C_μ) her. Die bisher mit s bezeichnete Vielfachheit ist also $= q - p_0 b_{\mu+1}$, was natürlich > 0 sein soll.

Sehen wir von dem trivialen Fall ab, daß die Potenzreihe (P_8) identisch Null ist, so beginnt sie wegen $d_0 = c_{\nu_0} = 0$ mit einem Index $\nu_0 \geqq 1$, $d_{\nu_0} \neq 0$; die Potenzreihe (P_9) läßt sich also jetzt in der Form schreiben:

$$y = c_0 + x^{\frac{a_{\mu+1} s_1 + \nu_0}{b_{\mu+1} s_1}} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} d_\nu x^{\frac{\nu - \nu_0}{b_{\mu+1} s_1}}.$$

Mittels $$y = c_0 + x^{\frac{a_{\mu+1} s_1 + \nu_0}{b_{\mu+1} s_1}} u$$

transformiert sich die Gleichung (I) auf folgende Form:

$$\sum_{\zeta=0}^{\infty} x^\zeta \sum_{\tau=0}^{\infty} \Phi_\varrho^{(\tau)} x^{\frac{a_{\mu+1} s_1 + \nu_0}{b_{\mu+1} s_1} \tau} \frac{u^\tau}{\tau!} = 0.$$

Setzt man hierin $b_{\mu+1} s_1 \varrho + (a_{\mu+1} s_1 + \nu_0)\tau = \alpha$ und bezeichnet mit α_0 die kleinste der Zahlen $\alpha \geqq 0$, zu welcher es ein $\Phi_\varrho^{(\tau)} \neq 0$ gibt, so nimmt diese Gleichung, wenn noch der gemeinsame Faktor $x^{\frac{\alpha_0}{b_{\mu+1} s_1}}$ wegdividiert wird, die Form an:

$$(7)\qquad \sum_{a=a_0}^{\infty} x^{\frac{a-a_0}{b_{\mu+1}s_1}} \sum_{\substack{\varrho\geqq 0,\ \tau\geqq 0\\ b_{\mu+1}s_1\varrho+(a_{\mu+1}s_1+\nu_0)\tau=a}} \Phi_{\varrho}^{(\tau)}\frac{u^{\tau}}{\tau!}=0 \qquad (\alpha_0\geqq 0^{13}).$$

Diese Gleichung (7) wird also von der Potenzreihe

$$(P_{10})\qquad u=\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} d_{\nu}x^{\frac{\nu-\nu_0}{b_{\mu+1}s_1}},\quad \nu_0\geqq 1,\quad d_{\nu_0}\neq 0,$$

erfüllt.

Wegen $\Phi_{p_0\,a_{\mu+1}}^{(q-p_0\,b_{\mu+1})}\neq 0$ ist sicher

$$\begin{aligned}\alpha_0 &\leqq b_{\mu+1}s_1p_0a_{\mu+1}+(a_{\mu+1}s_1+\nu_0)(q-p_0b_{\mu+1})\\ &= q(a_{\mu+1}s_1+\nu_0)-\nu_0p_0b_{\mu+1}.\end{aligned}$$

Nun muß das Anfangspolynom von (7), d. h. die zu $\alpha=\alpha_0$ gehörige innere Summe, aus mindestens zwei von Null verschiedenen Gliedern bestehen; denn dieses Polynom hat ja eine von Null verschiedene Wurzel, nämlich d_{ν_0}.

Es gibt also mindestens zwei verschiedene Wertepaare (ϱ_1, τ_1), (ϱ_2, τ_2) mit

$$(8)\qquad \begin{gathered}\Phi_{\varrho_1}^{(\tau_1)}\neq 0,\ \Phi_{\varrho_2}^{(\tau_2)}\neq 0,\\ \begin{cases} b_{\mu+1}s_1\varrho_1+(a_{\mu+1}s_1+\nu_0)\tau_1=\alpha_0,\\ b_{\mu+1}s_1\varrho_2+(a_{\mu+1}s_1+\nu_0)\tau_2=\alpha_0.\end{cases}\end{gathered}$$

Wir setzen fest, daß von allen derartigen Wertepaaren das Wertepaar (ϱ_1, τ_1) dasjenige mit dem kleinsten ϱ, also mit dem größten τ, sein soll (also ist speziell $\varrho_1<\varrho_2$, $\tau_1>\tau_2$); mit anderen Worten: Das Anfangspolynom von (7) soll mit $\Phi_{\varrho_1}^{(\tau_1)}\frac{u^{\tau_1}}{\tau_1!}$ als „höchstem" Glied beginnen. Es ist also vom Grad τ_1.

Aus $\varrho_1\geqq 0$ folgt

$$\tau_1\leqq\frac{\alpha_0}{a_{\mu+1}s_1+\nu_0}\leqq q-\frac{\nu_0p_0b_{\mu+1}}{a_{\mu+1}s_1+\nu_0}<q.$$

Der Grad des Anfangspolynoms von (7) ist also $<q$.

Aus (8) folgt

$$\frac{a_{\mu+1}s_1+\nu_0}{b_{\mu+1}s_1}=\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\tau_1-\tau_2}.$$

[13] Es ist $\alpha_0>0$ wegen $\Phi_0=0$; doch wird dies nicht benützt.

Wegen $0<\tau_1-\tau_2\leqq\tau_1$ besagt dies, daß der linksstehende Bruch sich jedenfalls soweit kürzen läßt, daß der Nenner $\leqq\tau_1<q$ wird.

Es bezeichne nun d den größten gemeinsamen Teiler von $a_{\mu+1}s_1+\nu_0$ und $b_{\mu+1}s_1$; wir setzen

$$\begin{aligned} a_{\mu+1}s_1+\nu_0 &= da \\ b_{\mu+1}s_1 &= db, \end{aligned} \tag{9}$$

wo also a und b teilerfremde positive ganze Zahlen sind und $b\leqq\tau_1$ ist. Dann sind bekanntlich

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1+pa \\ \tau &= \tau_1-pb \end{aligned} \qquad (p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

alle Lösungen der diophantischen Gleichung

$$b_{\mu+1}s_1\rho+(a_{\mu+1}s_1+\nu_0)\tau=\alpha_0$$

mit $\rho\geqq\rho_1$. Das Anfangspolynom von (7) hat also die Form

$$\Phi^{(\tau_1)}_{\varrho_1}\frac{u^{\tau_1}}{\tau_1!}+\Phi^{(\tau_1-b)}_{\varrho_1+a}\frac{u^{\tau_1-b}}{(\tau_1-b)!}+\Phi^{(\tau_1-2b)}_{\varrho_1+2a}\frac{u^{\tau_1-2b}}{(\tau_1-2b)!}+\cdots,$$

wo außer dem ersten noch mindestens ein Koeffizient von Null verschieden ist. Daraus folgt nach dem algebraischen Hilfssatz in Fußnote 12, daß die Vielfachheit der Wurzel $d_{\nu_0}=0$ sicher $\leqq\frac{\tau_1}{b}<\frac{q}{b}$ ist.

In der Gleichung (7) treten wegen (9) nur Zahlen α der Form $\alpha=d\beta$ auf; sei auch $\alpha_0=d\beta_0$ gesetzt, so läßt sich (7) in folgender Form schreiben:

$$\sum_{\beta=\beta_0}^{\infty}x^{\frac{\beta-\beta_0}{b}}\sum_{\substack{\varrho\geq 0,\ \tau\geq 0\\ b\varrho+a\tau=\beta}}\Phi^{(\tau)}_{\varrho}\frac{u^{\tau}}{\tau!}=0. \tag{10}$$

Die linke Seite von (10) hat natürlich dasselbe Anfangspolynom wie die von (7). Da dessen Grad $<q$ ist, darf nach Annahme der äußeren Induktion der zu beweisende Satz auf die Gleichung (10) mit der Potenzreihe (P_{10}) als Lösung angewandt werden; dabei werde in (10) $x^{\frac{1}{b}}$ als unabhängige Variable betrachtet. Dies liefert die Aussage, daß die Potenzreihe (P_{10}) notwendig die Form hat:

$$(P_{11}) \quad u = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu \left(x^{\frac{1}{b}}\right)^{\frac{\nu}{s_2}} \quad \text{mit} \quad 1 \leqq s_2 \leqq \frac{\tau_1}{b} < \frac{q}{b}; \; e_0 = d_{\nu_0}.$$

Mittels $y = c_0 + x^{\frac{b}{a}} u$ ergibt sich für die Potenzreihe (P_9) die Form

$$y = c_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu \, x^{\frac{a\, s_2 + \nu}{b s_2}},$$

womit wegen $b s_2 < q$ die Behauptung bewiesen ist. Damit ist der Fall C_{μ}) mit $\mu \leqq \omega - 2$ erledigt.

Die nächste Stelle des Beweises von Satz II, an welcher die Existenz von Lösungen ausgesprochen wurde, befindet sich S. 335, wo auf die Gleichung (5) in dem Fall, daß ihr Anfangspolynom keine q-fache Wurzel hat, die Annahme der äußeren Induktion angewandt wurde. Infolge der jetzigen Zusatzannahme zur äußeren Induktion (s. am Anfang des Beweises) folgt für die damaligen Lösungen (P_5) von (5) sofort die jetzige Behauptung.

Hatte dagegen das Anfangspolynom von (5) eine q-fache Wurzel, so wurde das Problem auf die Lösung der Gleichung (6) transformiert, für welche wörtlich dasselbe gilt, was soeben über (5) gesagt wurde.

Es bleibt also nur noch der Fall zu betrachten, daß das Verfahren der sukzessiven Transformationen im Beweis des Satzes II niemals abbricht; in diesem Fall hat sich als einzige, q-fach zählende Lösung die Potenzreihe (P_7) ergeben, in welcher der Exponentenhauptnenner $= 1$ ist.

Damit ist Satz III vollständig bewiesen.